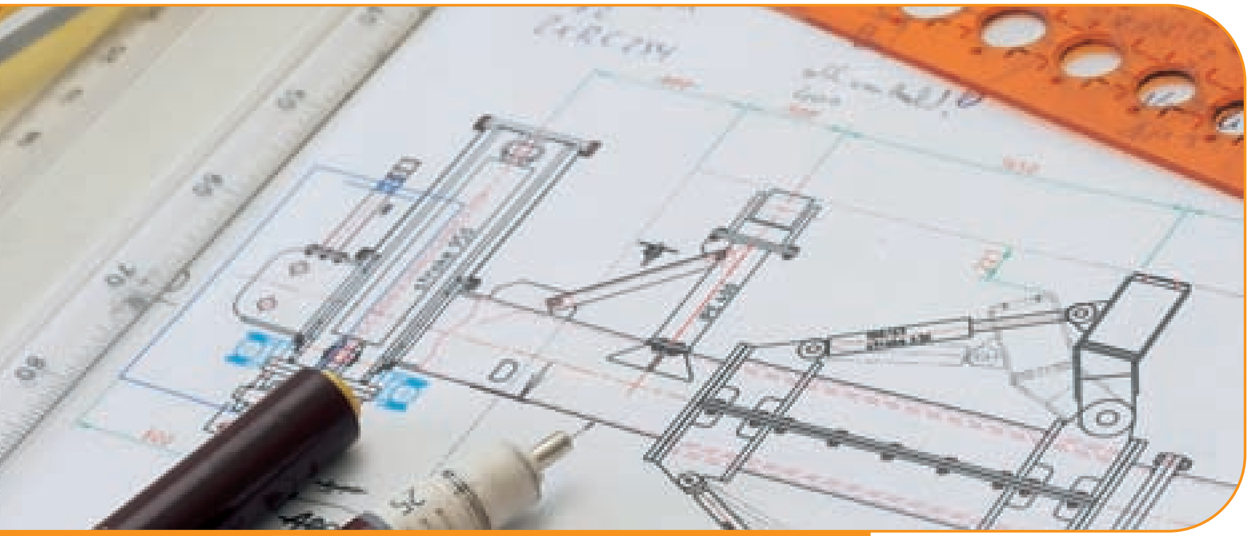


1 bachillerato

Dibujo Técnico

Vicente Patón
Miguel Hurtado

ECIR EDITORIAL

Dibujo Técnico

1 bachillerato

Diseño de interior: Diseño gráfico ECIR
Edición: Editorial ECIR
Impresión: Industrias gráficas Ecir (IGE)

Ilustraciones: Diseño gráfico ECIR
Diseño e ilustración cubierta: Valverde e Iborra / Diseño gráfico ECIR
Fotografía: Archivo ECIR/Istockphoto

Depósito legal: V-1837-2008
I.S.B.N.: 978-84-9826-380-0

ECIR EDITORIAL

Villa de Madrid, 60 - 46988 - P. I. Fuente del Jarro - PATERNA (Valencia)
Tels: 96 132 36 25 - 96 132 36 55 - Móvil: 677 431 115 - Fax: 96 132 36 05
E-mail: ecir@ecir.com - http://www.ecir.com

presentación

El dibujo técnico es un medio de expresión y comunicación indispensable, tanto en el desarrollo de procesos de investigación científica como en la comprensión gráfica de proyectos tecnológicos cuyo último fin sea la creación y fabricación de un producto. Su función consiste en ayudar a formalizar o visualizar lo que se está diseñando o descubriendo, y contribuye a proporcionar desde una primera concreción de posibles soluciones hasta la última fase del desarrollo, donde se presentan los resultados en planos definitivamente acabados.

Considerado el dibujo técnico como un medio de comunicación con el que el investigador o el creador transmite ideas, debe también contemplarse desde el punto de vista de la lectura y comprensión de las ideas o proyectos de los demás, estableciéndose para ello un conjunto de convencionalismos y normas que caracterizan el lenguaje específico del dibujo técnico, y que le dan su carácter objetivo, fiable y universal.

De este modo se encuentran en el dibujo técnico definidas las funciones instrumentales de análisis, investigación, expresión y comunicación en torno a los aspectos visuales de las ideas y de las formas.

El presente texto presenta sus contenidos divididos en los siguientes bloques:

- Una introducción sobre arte y dibujo técnico, tal como marca el nuevo currículo del área establecido por la LOE.
- Un primer bloque dedicado a la geometría métrica aplicada (trazados geométricos).
- Un segundo bloque que trata la geometría descriptiva (sistemas de representación).
- Un tercer bloque dedicado a la normalización y croquización.
- Un anexo final en el que se pueden encontrar las informaciones necesarias para el conocimiento de instrumentos, materiales y técnicas que se usan en el dibujo técnico.

Esta materia se encuentra directamente conectada con el área de educación plástica y visual de la ESO, habiendo tenido en cuenta los autores el carácter opcional del 4.º curso, por lo cual los contenidos se retoman desde el nivel común de 3.º de ESO.

Conocedores, por la práctica docente, de la aridez del lenguaje matemático aplicado a la geometría, los autores hemos tratado de vincular todas las explicaciones con ejemplos prácticos y reales del campo del diseño, del arte y de la arquitectura o ingeniería, dándole al texto un tratamiento más humanista que haga más agradable la asimilación de los contenidos expuestos.

Parodiando a Villard de Honnecourt (S. XIII): “En este libro encontraréis buenos consejos sobre la forma de dibujar y cimentar del modo que la disciplina de la geometría exige y enseña”.

Arte y dibujo técnico

1 Referencia histórica

2 Las Matemáticas y el dibujo técnico

3 La geometría en el arte

4 El dibujo técnico aplicado al diseño

5 Diseño industrial. Conjunción de lo funcional y lo estético

1 Referencia histórica

La historia de la humanidad nos habla de la necesidad que tuvieron los hombres, desde los primeros tiempos, de comunicarse entre sí. De esta necesidad surgen diferentes formas de expresión: mímica o corporal, oral o verbal y gráfica; convirtiéndose esta última en un lenguaje universal, que superando las barreras idiomáticas y culturales se ha instaurado como el nexo de unión entre el mundo de las ideas y su realización práctica, es decir, como el instrumento que ha hecho posible el desarrollo científico y técnico de la humanidad (Fig. 1.).

Indudablemente todo este proceso ha ido evolucionando a lo largo de la historia y dejándonos testimonios de esta evolución en forma de esculturas, relieves, dibujos, grabados o trazados.

Si realizamos un breve recorrido histórico, apreciaremos cómo ya en la antigua Mesopotamia y Egipto se encuentran muestras de la actividad de escribas y arquitectos que dibujan y proyectan edificios y construcciones. Es de destacar el ejemplo de la estatua sumeria del "Príncipe Gudea" (2450 a.C.), que sostiene sobre sus rodillas un tablero de dibujo con la planta y alzado de un edificio (Fig. 2). ¿Qué podemos decir del Arte Egipcio? Que en todas sus facetas se encuentra codificado y reglado como si se tratara de una técnica precisa y rigurosa, uno de cuyos ejemplos podemos contemplar en el "El sublime de los sublimes" Palacio-templo de la reina Hatsepsut en Deir-El-Baharí (Fig. 3). Proyectado y construido por el arquitecto Senmut, del cual nos ha llegado abundante información biográfica (Fig. 4).

De la antigüedad clásica, tenemos un tratado "de arquitectura" de Vitrubio (s. I a.C.), el cual utiliza fuentes griegas para su elaboración y que entre los conocimientos exigibles a un arquitecto nombra los siguientes: "sea experto en el dibujo, erudito en la geometría y no ignorante en la óptica, instruido en aritmética,... debe tener conocimientos de dibujo, para poder explicar mediante figuras el aspecto que quiere dar a sus obras. La geometría presta numerosos auxilios a la arquitectura; en primer lugar enseña el uso de la regla y del compás, instrumentos que sirven para dibujar con gran facilidad la planta de los edificios, los ángulos rectos y las superficies horizontales... con la aritmética se calcula el coste de éstos, se explica las relaciones entre sus medidas y se resuelve el arduo problema de las proporciones..." (Fig. 5).

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

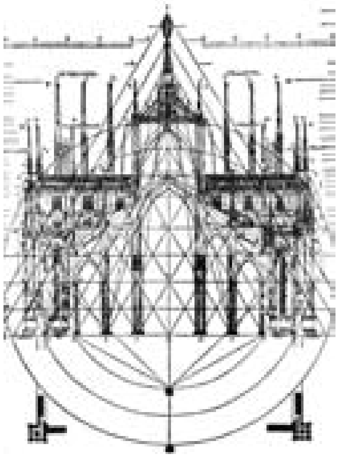


Fig. 5

De la edad media, el ejemplo más notable y conocido es el “Libro del cantero de Villard de Honnecourt (s. XIII), compuesto por 33 hojas de pergamino con finalidad didáctica (Fig. 6), el cual comienza con las siguientes palabras: “Villard de Honnecourt os saluda y recomienda, a todos aquellos que encuentren ayuda para su trabajo en este libro, rogar por su alma y conservar recuerdo de él. Porque en este libro pueden encontrarse buenos consejos sobre el arte de la albañilería y sobre las labores de carpintería; y encontraréis en él la forma de dibujar y cimentar del modo que la disciplina de la geometría exige y enseña”.

Pero es a partir del s. XIV cuando la perspectiva comenzó a interesar a los pintores, escultores y arquitectos, en su deseo de representar las cosas tal como ellos las veían.

Leonardo afirmaba que “la perspectiva era la brida y el timón de la pintura”. Que “el espejo debía ser nuestro maestro”. Habían llegado tiempos en que el arte occidental tendría como norte durante algunos siglos la representación visual. Evolución que se desarrolla desde Cimabue y Giotto hasta el final del impresionismo. Giotto (1267-1337) tenía como fin importante en sus pinturas reproducir las percepciones visuales de relación espacial. Giotto puede considerarse como el precursor de la perspectiva, más representativo de la primera época, y se puede observar en sus pinturas una resolución proyectiva muy parecida a la proyección oblicua (Fig. 7).

Fig. 8

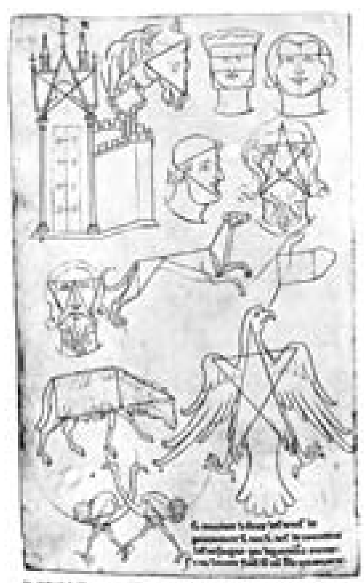


Fig. 6

Fig. 7

El claroscuro de Leonardo, con su célebre esfumato, es un paso hacia la negación de los límites de los cuerpos y hacia la visión de las formas bajo una concepción unitaria en pro de la profundidad atmosférica (Fig. 8).

El escultor y arquitecto Florentino Felipe Brunelleschi (1377-1446) estableció las primeras relaciones entre el ojo y el cuadro, las cuales fueron ampliadas por su discípulo Paolo Ucello, del cual dice Venturi que “la perspectiva no fue para Uccello más que la forma estilística de un arte que no ha sido jamás ni imitativo ni naturalista” (Fig. 9).

Fig. 9

Las ideas y escritos de Uccello fueron ampliados por el pintor y arquitecto genovés Leone Batista Alberti, que escribió libros teóricos que tuvieron gran difusión y prestigio entre los artistas de la época. En su obra "Tratado de pintura", dice: "Que la ciencia es esencial al artista, y las artes son aprendidas por la razón y el método. La primera necesidad del pintor es conocer la geometría."

Alberti fue el que introdujo el concepto fundamental de la perspectiva de un cuerpo, como intersección producida por el cuadro con el cono visual (Fig. 10).

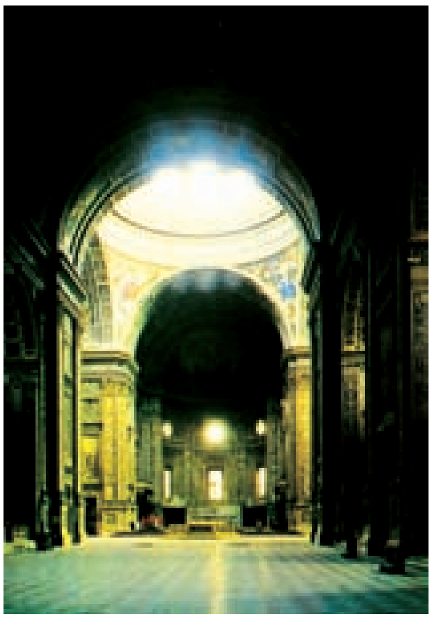


Fig. 10a

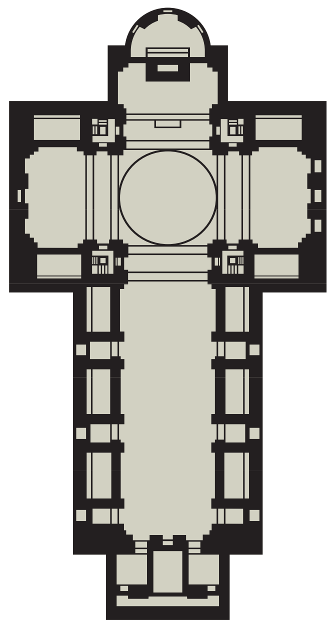


Fig. 10b

Jean Fouquet (1420-1480), nacido en Tours, es interesante señalarlo por haberse ocupado de la perspectiva curvilínea, dándose cuenta de la esfericidad del espacio ante el espectador.

Pero el más grande de todos, en este sentido, fue indudablemente Piero de la Francesca, pintor altamente intelectual, que vivió del 1416 al 1492. Fue también uno de los mejores matemáticos de su tiempo. Su manera de sentir la pintura parece que aspira a transformarlo todo en figuras geométricas; cada obra suya es un problema matemático. La colocación de una figura era calculada rigurosamente como un todo con relación a las otras. Es interesante observar que todas sus figuras están situadas delante de un espacio creado por la perspectiva, y el punto principal está emplazado en la zona más importante del Cuadro. La colocación del punto de vista a poca altura, y la situación de las figuras en primer plano, les da un carácter monumental de gran belleza.

Era muy de la época que los números armónicos unificaran el mundo, y todas sus pinturas se hallan montadas sobre una gran estructuración geométrica en la que una proporción numérica refiere cualquier objeto a la totalidad del conjunto.

En su cuadro "La flagelación de Cristo", la unidad de medida básica es la décima parte de la anchura del Cuadro, y esta unidad se refiere a las paredes, techo, cuadros del pavimento, columnas, figuras y radio del círculo en el que Cristo está atado (Fig. 11).

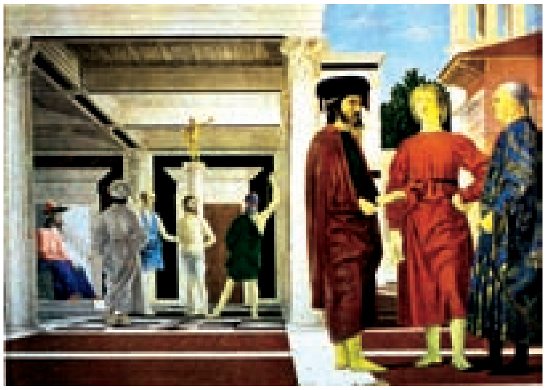


Fig. 11

Fig. 12

Parece ser que en las obras de Piero de la Francesca existe un misterioso trabajo de proporciones que son los resultantes de querer imponer un ritmo al espacio (Fig. 12).

Sus pinturas de *vistas de ciudades* logran producir un verdadero efecto de profundidad, mostrando la gran preparación de Piero en esta técnica.

"La costruzione legitima" fue expuesta de una forma clara en su tratado "De prospectiva pingendi", escrito en 1470 y dedicado al Duque Federico, pero permaneció inédito hasta fines del siglo XIX (1899).

Esta obra consta de tres volúmenes; el primero trata de los puntos, líneas y planos; el segundo, de los cuerpos estereométricos y de su construcción, y el tercero, de la realización perspéctica de las cabezas y de las formas arquitectónicas. Se observa el estudio completo de todas las teorías de Alberti y demuestra por medio de dibujos admirables que dos cuerpos iguales o desiguales pueden parecer desiguales o iguales. En la citada obra estudia la representación de una bóveda esférica cortada por círculos de distinta inclinación, siendo el primer caso de representación de una superficie curva mediante las proyecciones de varias de sus secciones planas, estableciendo el concepto de envolvente de una serie de curvas que son tangentes a la proyección del contorno aparente de la superficie esférica.

Piero escribió también un libro titulado "De quinque corporibus regularibus", que está dedicado al hijo del Duque, Guidobaldo.

G. Vasari, en su obra sobre "La vida de los más célebres pintores, escultores y arquitectos", considera a Piero de la Francesca como el mejor geómetra de su tiempo, y escribe: "Raro nella difficoltá del corpi regolari, nell'aritmetica e nella geometria, y libri certamente gli hanno acquistato nome del miglior geómetra che fusse nei tempi suoi".

La geometría fue para Piero el medio de dar a la forma su belleza absoluta.

Luca Pacioli (1445-1514), monje franciscano y profesor de varias Universidades italianas, escribió, entre otras obras, un "Tratado de Proportioni et Proporcionalitá", y el hecho de haber sido la primera obra completa de matemáticas que se imprimió, ejerció gran influencia por la difusión que tuvo. Lo escribió en Milán a raíz de unas conversaciones en las que participó Leonardo (1497-98) y fue publicado en Venecia en 1509. También publicó Luca Pacioli la obra de Piero "De corporibus regularibus" (los cinco volúmenes fundamentales), que no había sido dado a conocer por el autor.

Es también interesante señalar la utilización de las falsas perspectivas, como, por ejemplo, Bramante (Donato D'Angnolo di Pascuccio, 1444-1514), que cuando no podía disponer de un espacio real acudía a la perspectiva para obtener un espacio ilusorio.

Andrea Palladio (1518-1580) utiliza también estas perspectivas modificadas para sugerir mayores profundidades de las que realmente se podían obtener.

Vemos la Galería del Palazzo Spada de Francesco Borromini (1599-1667), que alrededor de 1635 construyó un patio lateral al famoso palacio del cardenal Bernardino Spada, donde podemos ver un ejemplo notable de las llamadas "Maravillas mágicas" o perspectivas aceleradas.

Cuando el espectador se halla en el patio y mira la galería de columnas, le da la sensación que es enormemente larga y al fondo se ve la gran estatua de un guerrero. Al acercarse se da cuenta que ha sufrido un engaño óptico, pues el arco frontal de primer término tiene 5'80 metros de alto y 3 metros de ancho y el arco posterior de la Galería 2’45 metros de alto y 0’91 de ancho. La longitud comprendida entre el arco de entrada y el de salida es de 8’50 metros.

Las paredes laterales convergen; el piso tiene una inclinación ascendente y la parte superior abovedada descendente, disminuyendo el intervalo entre las columnas. El guerrero resulta ser una estatua muy pequeña (Fig. 13).

Leonardo da Vinci (1452-1519) efectúa excelentes trabajos sobre perspectiva, pues para pintar se prepara con hondos y extensivos estudios de anatomía, perspectiva, geometría y física. En su célebre “Tratado de la pintura”, se extiende hacia problemas del claroscuro, estudiando la teoría de las sombras, simples, derivadas y compuestas, los brillos y los reflejos.

Pero Leonardo percibió con claridad que la visión perspectiva no es sólo un problema geométrico y de proyecciones, sino que estudia la modificación que produce la capa de aire interpuesta entre los objetos y el espectador, alterando los colores.

y la nitidez de los contornos en relación con las distancias. Esto establece en algunos casos una corrección a la abstracción geométrica del espacio que no puede por sí sola dar una idea visual de la distancia.

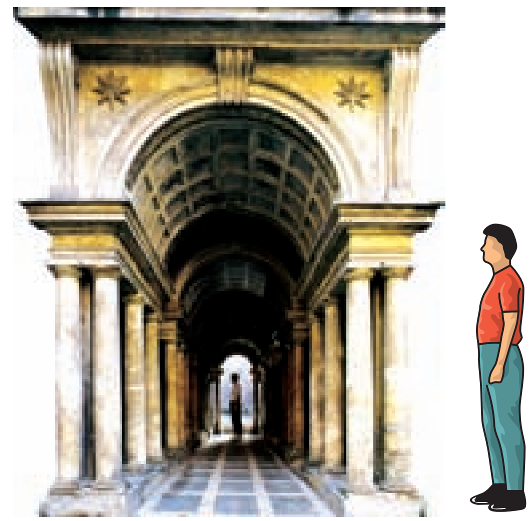


Fig. 13a y 13b

Alberto Durero (1471-1528) merece también especial mención por sus trabajos referentes a los trazados perspectivos. Hacia el final de su vida escribe un tratado sobre líneas, superficies y cuerpos que se titula “Underweysung der Messung”, que es una exposición de geometría gráfica y de proyecciones paralelas y cónicas. El punto de fuga interviene ya como método abreviado.

Son célebres sus grabados, en los que el pintor expresa gráficamente procedimientos distintos para estudiar una exacta representación perspectiva (Fig. 14).

Fig. 14

Guidubaldo del Monte (1545-1607) fue uno de los matemáticos que más contribuyeron a hacer de la perspectiva una ciencia matemática. Entre sus muchas publicaciones se encuentra la “Perspectiva libri sex” (1600), constituyendo esta obra el máximo exponente de su especulación en las matemáticas.

Establece por vez primera que la perspectiva de un sistema de rectas paralelas es un haz de rectas concurrentes y el punto de fuga es señalado como “Punctum concursum”.

En la segunda parte de esta obra hace consideraciones sobre problemas de restitución perspectiva, como, por ejemplo, la determinación del Punto de Vista dados una recta y su imagen.

También se da cuenta que las imágenes perspectivas por sí solas no determinan posiciones exactas del espacio y demuestra que para obtenerlas es necesario conocer la proyección ortogonal sobre el plano horizontal y las alturas de cada uno de los puntos. Se expresa diciendo que es necesario auxiliarse de una figura esquemática “superficialis” con respecto a la figura efectiva “corpórea”.

Estudia las sombras producidas por focos de luz próximos, hace algunos comentarios sobre la perspectiva en relieve e inicia perspectivas sobre superficies no planas.

Carlo Pellegrino Danti (1537-1586) conocido por Egnatio Danti (nombre que tomó al entrar en la orden de los dominicanos), efectuó una gran labor de divulgación de todos estos conocimientos y tradujo “La Prospectiva di Euclide”.

Construyó muchos instrumentos físicos y, entre ellos, un aparato para los trazados perspectivos.

El deseo de sacar de los clásicos antiguos de las matemáticas los fundamentos y principios de los conocimientos científicos, constituía en las últimas décadas

Fig. 15

del siglo XV y principios del XVI una verdadera obsesión. Infinidad de publicaciones de Vitrubio, Euclides, Platón, Ficino, etc., se iban produciendo en las ciudades de Florencia y Roma.

La perspectiva estaba considerada como el medio indispensable para la representación de la profundidad, y los artistas del Renacimiento la llamaban "una invenzione del nostro seculo nuovo", pero a pesar de que llegaron a dominar las leyes fundamentales de la perspectiva, consiguiendo trazados perfectos, el sentido de profundidad obtenido era solamente lineal; sería necesario esperar a mitad del siglo XVI y el XVII para que se llegase a una concepción espacial más completa, uniendo los distintos planos que generalmente se empleaban, colocando las figuras y objetos como verdaderas capas frontales.

Los artistas no se atrevían a representar los objetos fuera de su "dimensión normal", y tanto Piero della Francesca como Leonardo sabían muy bien que había una divergencia entre la construcción proyectiva central y la visión humana. Se hablaba de las deformaciones perspectivas que era necesario evitar. Las relaciones exactas de tamaño entre los objetos lejanos y los muy próximos, tal como se dan proyectivamente en perspectiva, eran evitados en lo posible, y a ello tendía la elección de una distancia principal más bien grande que corta.

En el siglo XVI se produce la transformación decisiva, adquiriendo el fondo la importancia que le correspondía en su colaboración formal para representar la profundidad.

La línea del Horizonte es ahora considerada como símbolo máximo del espacio, el elemento del infinito que la pintura antigua no tuvo en cuenta, pues cuando en siglos anteriores aparecieron los primeros fondos en lejanías azuladas era verdaderamente un deseo de profundidad, pero el espacio estaba concebido por varios términos superpuestos.

Fig. 16a El amor victorioso de Caravaggio 1598-99.

Es en la segunda década del siglo XVI cuando "Il Parmigianino" se pinta un autorretrato en un espejo convexo (fig. 15) con una mano gigante en primer término y como fondo un ángulo de habitación con una ventana que, como proyección perspectiva curvilínea, las rectas están representadas por arcos de círculo proyectados en el plano del Cuadro. Este cuadro increíble, desconcertante, que fue considerado fuera de toda lógica, es un intento, aunque extremo, de llevar a la representación los verdaderos valores perspectivos de las cosas que, posteriormente, grandes artistas del barroco llevarían a su realización más extraordinaria.

Por otra parte, el concepto del espacio tuvo un desarrollo histórico propio y no podía ser resuelto solamente con una estructuración lineal perspectiva aunque fuese perfecta.

Todos los objetos eran vistos como en un primer plano, reduciéndose a representar más pequeño lo lejano y la más grande lo cercano, pero todo visto con el mismo detalle. La mirada iba enfocando sucesivamente todos los objetos como cosas aisladas y su relación era puramente lineal.

Leonardo ya intuía una concepción del espacio mucho más real con una visión fundamentalmente pictórica. En muchas partes de su "Tratado de la Pintura" habla desvalorizando indirectamente la importancia de la línea; "con la distancia, se pierde la noción de los contornos", "La terminación de un color es el principio de otro color y no tiene que estar dada por la línea", pero la mirada seguía desplazándose sobre los objetos buscando el volumen de ellos sin considerar el espacio como el elemento primordial que iba a ser capaz de resolver la representación de la tercera dimensión en el Cuadro de una forma más completa bajo un concepto perspectivo integral.

Más adelante, los grandes pintores claroscuristas, como Ribera y Caravaggio, consideraron la luz como elemento unificador, y efectivamente constituyó un paso decisivo en la gran búsqueda de la visión total del espacio. Pero continuaba sin ser vista la profundidad, seguían sin ser considerados los huecos que eran partes tan importantes como los mismos objetos. Faltaba la unidad de todo el campo visual.

Fue Velázquez quien consiguió el gran hecho histórico de la representación perspéctica del espacio con un sentido unitario, equilibrado y perfecto, que constituye la culminación del movimiento iniciado por Giotto en su colosal esfuerzo por separarse de la representación bidimensional primitiva.

Velázquez efectúa la revolución más grande que se ha producido en la representación tridimensional sobre el plano. El es quien consideró el espacio antes que los objetos. El fue quien, determinando el punto de vista, fijó la mirada sobre un punto del campo visual y la sostuvo quieta sin mirar cosa alguna; estaba dándose cuenta de la profundidad, estaba viendo el espacio.

Efectivamente, cuando se miran los objetos no se puede ver el espacio. Cuando se mueve la mirada, sólo se ven las cosas y los volúmenes de ellas; es necesario fijarla para poder darse cuenta del espacio y el valor de los huecos.

Velázquez establece por primera vez un nuevo modo de mirar que permite una visión espacial perfecta. Y ésta es la colosal innovación y transformación más radical que se ha efectuado jamás, el acontecimiento revolucionario de mayor profundidad producido dentro del campo de la representación.

La gran cuestión planteada en los comienzos del Renacimiento quedaba resuelta por uno de los pintores más geniales que han existido en todos los tiempos.

Ortega y Gaset, hablando sobre Velázquez, ya señaló con aguda visión el gran acontecimiento histórico que indicamos: “Velázquez, con una audacia formidable, ejecuta el gran acto de desdén llamado a suscitar toda una nueva pintura; DETIENE SU PUPILA. Nada más. En esto consiste su gigantesca revolución”.

Acto de desdén, porque desdeña los objetos para ver el espacio, y esto lo consigue de forma magistral en las “Meninas” y en las “Hilanderas” (Fig. 16b).

Con una sencillez propia de los grandes genios resuelve el gran problema de representación que había preocupado durante siglos a muy grandes artistas. Mirar sin mover la mirada para poder ver el espacio. Esto es todo.

Posteriormente, nuevos movimientos pictóricos llevaron a sus últimas consecuencias este formidable descubrimiento de Velázquez.

En casi toda la obra de Cézanne son eludidas las poderosas líneas de la perspectiva central por perturbar la mirada con respecto al diseño fundamental de las formas, las cuales se sitúan generalmente de frente como una serie de planos superpuestos.

La influencia de Cézanne sobre el arte moderno subsiguiente fue considerable.

Cézanne sustituye la perspectiva central.–Al suprimir la perspectiva evitando las líneas convergentes hacia el interior del cuadro, y queriendo conservar la profundidad, tuvo que resolver el problema de la distancia mediante planos superpuestos que sugieren el concepto tridimensional del espacio.

El claroscuro y el color son tratados igualmente cualquiera que sea la profundidad, y para sustituir la transformación de la perspectiva tonal que en ellos se produce se vale del efecto de retroceso que tienen los colores fríos y del saliente de los colores cálidos (Fig. 17).

Fig. 16b Las hilanderas de Velazquez.

Fig. 17a Cézanne.

Fig. 17b

Cézanne en sus cuadros duplica el punto de visión. La parte derecha es vista desde un punto más bajo que la parte izquierda del cuadro.

El pintor, más conservador en esencia, efectuó innovaciones que en sus consecuencias determinaron la revolución más grande del arte moderno.

La influencia de Cézanne es indiscutible en el "cubismo heroico" del primer momento. La estructura y el volumen son las máximas preocupaciones de Braque y Picaso en este período del cubismo.

El cubismo del siglo XX, el cual inicia la búsqueda de nuevos elementos estructurales y la representación simultánea de la forma desde múltiples puntos de vista. Cuando se produjo este movimiento pictórico horrorizó al público, que no admitía ver al mismo tiempo distintas vistas de un objeto, y lo que es más aún, partes de una misma vista dibujadas en forma discontinua. El cubismo, a parte de otras consideraciones estéticas que no son de este lugar, intentó la representación de una "cuarta dimensión", como dijo Apollinaire. Picaso y Braque en 1910 se separan definitivamente de la perspectiva clásica albertiana y efectúan representaciones a la vez desde distintos puntos de vista.

La representación cubista no se basa en la reproducción óptica de la imagen de los objetos, sino en la representación de las cosas partiendo del recuerdo, tal como se han situado en la conciencia los distintos ángulos de visión que se han tenido de ellas.

La tercera dimensión desaparece y distintas vistas de las formas son reproducidas simultáneamente como multiplicando puntos de vista. Los planos determinantes del volumen son situados generalmente de frente sin que el claroscuro sea el elemento unificador que los determine, es decir, que estos planos en que el objeto es descompuesto son presentados en su bidimensionalidad.

Esto representa la ruptura total con la visión clásica monóptica basada en la perspectiva albertiana que ha venido empleándose durante más de cuatro siglos. La formidable capacidad creadora de Picaso dirigía este movimiento verdaderamente revolucionario que produjo el impacto mundial más desconcertante, dentro del campo pictórico. En realidad se trataba del comienzo de una búsqueda hacia una nueva concepción espacial, la cual continúa en nuestros días (Fig. 18).

Fig. 18

El futurismo en el manifiesto técnico de la pintura (1910) firmado por Boccioni, Carrá, Russolo, Balla y Severini. "Debido a la persistencia de las imágenes en la retina, los objetos en movimiento quedan multiplicados y deformados, sucediéndose unos a otros como olas a través del espacio. Así un caballo al galope no tiene cuatro patas, tiene veinte, y sus movimientos son triangulares".

En 1920 los hermanos Naum y Antoine Pevsner publican en Moscú los principios del "Movimiento constructivista o realista", que también incide sobre el mismo problema.

«El arte debe basarse sobre dos elementos fundamentales: el espacio y el tiempo» (Fig. 19).

El volumen no es la única expresión espacial.

Los elementos cinéticos y dinámicos pueden permitir la expresión del tiempo real, los ritmos estáticos no son suficientes.

El volumen de la masa y el volumen del espacio no son plásticamente la misma cosa, sino dos materiales diferentes, concretos y mensurables.

En los ritmos dinámicos de nuestras obras, el tiempo interviene como factor de emoción. El tiempo es la sustancia ideal de nuestras construcciones, es el campo en donde se mueven las figuras sucesivas de nuestras obras, nosotros lo consideramos como la “cuarta dimensión.”

Como podemos ver, estéticas distintas han abierto diferentes espacios a la mirada, pues es al espectador a quien corresponde el proceso de restablecer la continuidad espacial o temporal que estas representaciones, bien desde distintos puntos de vista o sucesivas “instantáneas” de las formas en movimiento, han excluido.

Cada época y cada civilización han tenido una distinta concepción espacial. Cada una diferente pero todas válidas.

Fig. 19

2 Las Matemáticas y el dibujo técnico

El hacer matemático a lo largo de la historia no es un hacer único, sino que es un trabajo a base de cambios y rupturas, en las cuales se crean nuevas disciplinas o ramas, por aparición de nuevas técnicas de trabajo, existiendo además, durante algunos momentos, varias formas de hacer englobadas todas bajo el nombre de común universal de «matemáticas». Esta universalidad hace comprender el hecho de que, en cada momento de ruptura, aparezcan varios matemáticos que, de forma simultánea y sin comunicación alguna entre ellos, dediquen sus esfuerzos intelectuales a un mismo propósito llegando a una solución común, así sucede con la geometría no-euclídea hiperbólica desarrollada simultáneamente por Gauss, Bolyai, Lobatchevski; la geometría analítica por Fermat y Descartes; las funciones abelianas por Abel, Jacobi, Gauss: las funciones automorfas por Klein y Poincaré; la definición por abstracción por Frege, Cantor, Dedekind... y así un largo etcétera.

La principal razón, causa provocadora de estas rupturas, es la búsqueda de un hacer matemático general no basado en su aplicación a lo particular, sino en la abstracción pura del conocimiento matemático. Descartes tuvo plena conciencia de que la búsqueda del hacer matemático que él había emprendido era la búsqueda de un hacer totalmente diferente al de los aritméticos y geómetras renacentistas. De este ejemplo se puede comprobar que las luchas internas del hacer matemático por la separación de lo funcional de lo abstracto, de lo puramente analítico de lo no analítico, o más bien de lo sintético, han estado siempre presentes a lo largo de la historia del hacer en sí, incluyendo y excluyendo criterios, aceptándolos como matemáticos y negándolos como tales en función del tiempo o el estado del conocimiento. Así ocurrió con la creación de Monge, plasmada luego en su tratado de Geometría Descriptiva, que no llegaría a ser considerada como aporte matemático sino de ingeniería militar, por lo que se mantuvo en secreto durante 17 años, en los cuales fue desarrollada y perfeccionada en la Politécnica Francesa, pero siempre como herramienta no matemática. Sin embargo, fue por medio de la geometría proyectiva, la que le dio rango de disciplina matemática, volviendo a desaparecer del contexto matemático posteriormente.

Realmente lo que pretendían Lázaro Carnot y Gaspar Monge era desterrar de la geometría la analítica provocando una auténtica renovación. Por una parte se van a crear geometrías puramente sintéticas, es decir, por construcción gráfica y razonamiento sin fórmulas, la descriptiva y la proyectiva; por otro, una geometría auténticamente analítica en el sentido de utilización del cálculo, volviendo a plantearse el constante dilema de análisis y síntesis.

De esta forma surge una auténtica edad de oro del hacer geométrico sintético por medio de eruditos como Poncelet, Chasles, Steiner, etc. quienes consiguen sistematizar y resumir toda la geometría sintética.

Esta edad de oro de la geometría sintética provocará una verdadera proliferación de todo tipo de geometrías, aunque marcadas por el predominio de la geometría proyectiva. Hacia el año 1875 Sophus Lie y Klein intentan la unificación de todas ellas, atendiendo a lo que de común pudieran tener, hecho que provocará, precisamente, la desaparición de lo unificado, de lo puramente geométrico o sintético, convirtiéndolo en un hacer estrictamente algebraico y analítico.

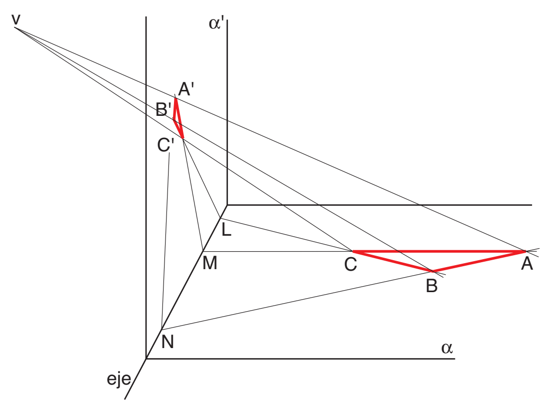


Fig. 20

Los griegos antiguos, como ya hemos dicho, no eran capaces de producir teoremas de este tipo, porque sus conceptos no eran lo suficientemente avanzados y cada nuevo caso tenía que examinarse desde el principio. En su momento culminante, con la obra de Apolonio, la geometría griega era una estructura maravillosa, con una fuerza todavía no menospreciada por parte de aquellos que creen que a la fuerza todo lo moderno tiene que ser mejor, incluso si lo emplean los incompetentes. Pero faltan unos *teoremas generales* en la geometría griega.

Según Dan Pedoe, Desargues tiene un teorema de la geometría proyectiva asociado a su nombre, y éste es de importancia primordial en los fundamentos de la geometría. *ABC* y *A'B'C'* son dos triángulos no necesariamente dentro del mismo plano, tales que las uniones *AA'*, *BB'* y *CC'* pasan todas a través del mismo punto *V*. Luego, las intersecciones de las tres parejas de lados *BC*, *B'C'*; *CA*, *C'A'*, y *AB*, *A'B'* son tres puntos sobre una línea (Fig. 20).

Para explicar la intersección que pudiera dar cualquier persona que trabajara en la teoría de la perspectiva, como Desargues, señalamos que si *ABC* es un triángulo dentro del plano α, la imagen de *ABC* en el plano α' es el triángulo *A'B'C'*, y *V* es el vértice del cono visual (de hecho, el ojo), entonces *AA'*, *BB'* y *CC'* pasan todas a través de *V*, y ya que *AB* proyecta hasta *A'B'*, y los puntos sobre los ejes de proyección *se proyectan en sí mismos*, la intersección de *AB* y *A'B'* *es un punto sobre el eje de proyección*.

Esto es verdad para la intersección de *BC*, *B'C'* y para la intersección de *CA*, *C'A'*. De aquí que los tres puntos designados en la declaración del teorema se sitúen de verdad sobre una línea.

Ahora bien, ¿qué ocurre si mantenemos el triángulo *ABC* fijo en el plano α, y *A'B'C'* fijo en el plano α', y *giramos el plano* α, alrededor del eje de intersección de α y α' hasta que a coincida con el plano α'?

Los dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* se sitúan ahora en un plano y son tales que las intersecciones de *BC*, *B'C'*, *CA*, *C'A'*, y *AB*, *A'B'* se sitúan todavía sobre una línea, el anterior eje de intersección de α y α'. No estamos convencidos inmediatamente de que las uniones *AA'*, *BB'* y *CC'* aún puedan pasar a través de un punto, pero de hecho sí que lo hacen. Esto se llama a veces la *recíproca* del Teorema de Desargues, pero puede probarse como válida si el propio Teorema de Desargues es válido, como consecuencia lógica, por lo que cabe considerar a cualquiera de las dos declaraciones del teorema como el *Teorema de Desargues*.

La historia de las publicaciones de Desargues es interesante y algo triste. Su estilo era extremadamente conciso y difícil de entender, y siempre estaba inventando términos nuevos para describir ideas conocidas. Describió a su trabajo como un "*brouillon-projet*", un borrador de proyecto, y dejó a los demás el trabajo de ampliar sus nociones. Su amigo, el grabador Abraham Bosse, cuyo estilo era tan prolijo como el de Desargues conciso, hizo precisamente esto, y finalmente perdió su posición en la École des Beaux Arts por propagar las ideas de Desargues. Porque Desargues tenía enemigos. En una etapa de la batalla, Desargues hizo pegar carteles en todo París, en los que atacaba una teoría rival sobre la perspectiva atribuida a un tal *père* Dubreuil, y los carteles ofrecían una recompensa a cualquier persona que pudiese probar que la teoría de Desargues no era la mejor. Frecuentemente, ha habido matemáticos que se han librado a una controversia reconrosa, mas parece ser que Girard Desargues fue único en sus métodos de debate.

A pesar de que Descartes, Pascal y otros elogiaron la obra de Desargues, ésta desapareció durante siglos hasta que un ingeniero del ejército, en aquella época *le général* Poncelet, lo revalorizó en 1822, en su famoso tratado sobre la geometría proyectiva, la mayor parte del cual fue escrito cuando Poncelet se encontraba prisionero de los rusos, capturado durante la desastrosa retirada de Napoleón en Moscú.

En la segunda edición del *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, Poncelet se une a las filas de los oprimidos. Página tras página, se dedica a la controversia, en la que los objetos del ataque no son solamente ciertos académicos, sino otros dos geómetras franceses, Gergonne y Brianchon. El tema que se disputa esta vez no es la perspectiva, sino el *Principio de dualidad*, una de las grandes nociones de la geometría proyectiva.

Antes de describir este principio, permítasenos señalar que la afirmación de un artículo reciente del *New Yorker*, según la cual los matemáticos nunca se desalientan cuando otro publica primero un descubrimiento muy apreciado, o cuando otro confirma sus derechos a ello, ha de basarse en una completa ignorancia de la historia de las matemáticas.

El Principio de la Dualidad se basa en el comentario de que nuestros dos axiomas principales para la geometría proyectiva del plano muestran una *dualidad*, es decir, pueden convertirse el uno en el otro simplemente si intercambiamos los términos *punto* y *línea*, y las palabras *se sitúan y pasan a través de*, así como, naturalmente, las palabras *sobre* y *a través*. Si empleamos el término general *incidente* para un punto que se sitúa sobre una línea, o para una línea que pasa a través de un punto, y volvamos a escribir los axiomas de la forma siguiente:

1. Dos puntos distintos dentro del plano determinan una línea única en la que ambos inciden,

2. Dos líneas distintas dentro del plano determinan un punto único, con el que ambas son incidentes, entonces ambos axiomas son interconvertibles de manera todavía más simple.

Supongamos ahora que añadimos a nuestro diccionario elemental de términos intercambiables los términos *unión*, *intersección* y *triángulo*, al referirnos a tres puntos no-colineales, y *trilineal* al referirnos a tres líneas no-concurrentes, y naturalmente *colineal* al referirnos a puntos sobre una línea, y *concurrentes* al referirnos a líneas a través de un punto, entonces nos encontramos en situación de aplicar el Principio de la Dualidad a aquellos teoremas que incluyen solamente puntos, líneas, intersecciones, uniones, triángulos y trilíneas.

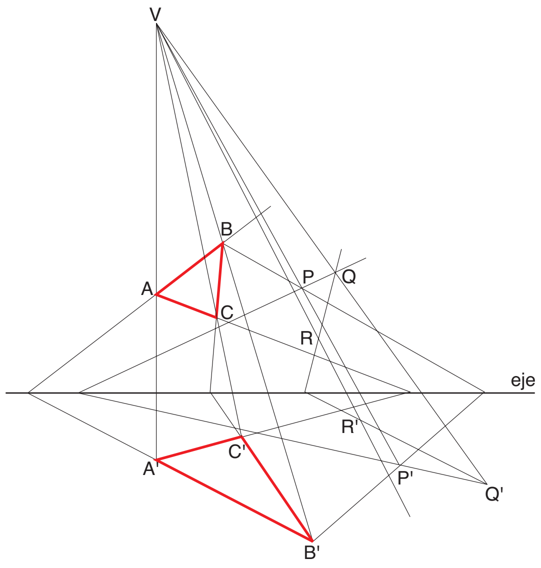


Fig. 21

El Principio afirma que cada uno de tales teoremas lleva un teorema sombra (dual) incluido en sí mismo, una especie de *Doppel-Gaenger* matemático, y que este teorema dual surge a partir de la simple enunciación del teorema original por medio de *un intercambio automático*, con ayuda de nuestro pequeño diccionario, de los términos *punto*, *línea*, o *unión*, *intersección*, o *colineal*, *concurrente*, o *triángulo*, *trilínea*.

Cuando se aplica este Principio al Teorema de Desargues, obtenemos *la recíproca* del Teorema de Desargues. Verifiquemos esto al escribir el Teorema de Desargues de la forma siguiente:

Si dos triángulos son tales que las uniones de los correspondientes vértices son incidentes con un punto, las intersecciones de los lados correspondientes son incidentes con una línea.

Al transformarse, según nuestro diccionario, y al intercambiar *vértice* y *lado*, tenemos:

Si dos trilíneas son tales que las intersecciones de los lados correspondientes son incidentes con una línea, entonces las uniones de los vértices correspondientes son incidentes con un punto.

Esto es la recíproca del Teorema de Desargues. Las matemáticas se esfuerzan en pasar sin principios mientras vaya adelantando, y el Principio de la Dualidad es hoy en día un teorema, quizás demostrado más fácilmente cuando se introduce el álgebra en la geometría, pero una discusión sobre este punto nos llevaría demasiado lejos. Sin embargo, incluso esta corta descripción del Principio de la Dualidad, que puede extenderse al espacio proyectivo de un número ilimitado de dimensiones, posiblemente demuestre el afán que tenían los geómetras implicados en su invención (o descubrimiento) en cuanto a apropiarse de él como su propia idea personal.

Demostraremos ahora la importancia que tiene el Teorema de Desargues dentro de la teoría de la perspectiva. Una vez más, supongamos que tenemos un triángulo *ABC* dentro de un plano α, y que el triángulo *A'B'C'* es su representación dentro del plano α; el ojo del pintor es *V*. Las líneas correspondientes, tales como *AB* y *A'B'*, interceptan en el eje de proyección, la intersección de los planos α y α'. Otra vez desdoblamos los planos α y α' alrededor del eje hasta que se sitúan en el mismo plano, proceso al que se llama *robattment*.

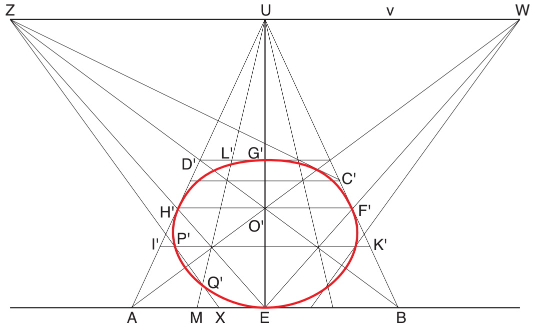


Fig. 22

Tenemos ahora dos triángulos *ABC*, *A'B'C'* dentro del mismo plano, y las intersecciones de *AB*, *A'B'*, de *BC*, *B'C'*, y de CA, C'A' se sitúan sobre una línea. Según el Teorema de Desargues, las uniones *AA'*, *BB'* y *CC'* aquí también pasan a través de un punto *V* (Fig. 21). Ahora, *V* está determinado únicamente como la intersección, de, digamos, las líneas *AA'* y *BB'*. Se desprende que, si tenemos un polígono cualquiera *PQRSTU*... y la imagen proyectada *P' Q' R' S' T' U'* ..., entonces las líneas correspondientes tales como *PQ*, *P'Q'* se encuentran *todas* en el eje, y las uniones de todas las parejas de los puntos correspondientes, *PP'*, *QQ'*, *RR'*, *SS'*... pasan todas por el punto *V*. Este último resultado es una consecuencia inmediata de haber aplicado el Teorema de Desargues a los triángulos *ABP*, *A'B'P'*, luego a los triángulos *ABQ*, *A'B'Q'*, y así sucesivamente. Las uniones *PP'* y *QQ'* pasará a través de la intersección de *AA'* y *BB'*, que es el punto *V*.

El problema del dibujo en perspectiva, tal como lo enfocaron los pintores del Renacimiento, era el siguiente. Dada una figura tal como un polígono *PQRST*,... dentro de un plano α, llamado el *plano horizontal*, ¿hasta qué punto puede realizarse un dibujo en perspectiva correcto del mismo en el plano "rebatido" α', llamado *plano pictórico*? Sigue habiendo una línea de fuga, llamada también *línea del horizonte*, en α', y la líneas correspondientes, tales como *PQ* y *P'Q'*, intersección en una línea, el eje, llamado también *línea horizontal*.

En Durero y el arte de la perspectiva vemos cómo resolver el problema de dibujar la representación de un círculo inscrito en un cuadrado, empleando la perspectiva bi-puntual. Enseñamos ahora cómo representar un polígono *PQRST*... correctamente, y un círculo, inscrito o no dentro de un cuadrado con los lados colocados en direcciones apropiadas (Fig. 22).

Piero della Francesca, en un libro publicado entre 1470 y 1490 demostró cómo podía hacerse. Obtendremos resultados idénticos empleando el Teorema de Desargues. Piero della Francesca sabía que unas líneas correspondientes interceptan en la línea horizontal; lo que no sabía, o al menos no se sirvió de ello, es que las uniones de unos puntos correspondientes, tales como *PP'*, pasan todas a través de un punto *V*. Llamamos este punto el centro de perspectiva.

Fue Poncelet quien demostró que *todos los círculos pasan a través de la misma pareja de puntos complejos sobre una línea en el infinito*. Éstos se llaman normalmente *I* y *J*, y, con el debido respeto, se entiende que los nombres enteros son Isaac y Jacob. Después, Laguerre, cuando todavía en la escuela, demostró que puede definirse el ángulo euclidiano con respecto a *I* y *J*, y el camino quedó libre para demostrar que la geométrica euclidiana no es más que *la geometría proyectiva con referencia a una pareja especial de puntos* (Fig. 23).

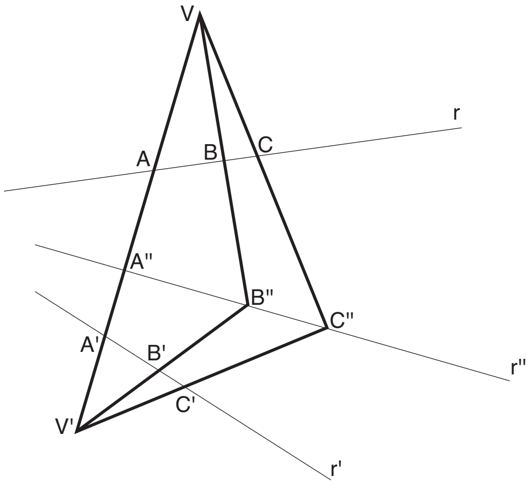


Fig. 23 **Equivalencia de las proyectividades según Poncelet y Chasles.**

Finalmente, como indicación de las direcciones que ha tomado el desarrollo de la geometría, señalemos que es posible calificar como *puntos* lo que de otra manera sería un conjunto de objetos sin especificar, y calificar como *líneas* ciertos subconjuntos de este conjunto *universal*, y con este nombre damos a entender que no tomaremos en cuenta todo lo que esté fuera de este conjunto. Decimos que un punto *P* es incidente con una línea *l*, si el punto *P* está situado dentro del subconjunto que especifica la línea *l*.

Ahora bien, si estos puntos y estas líneas corresponden a ciertos axiomas, tenemos una estructura que llamamos una *geometría*, y podemos aplicar nuestras deducciones a cualquier conjunto de objetos que, con las interpretaciones apropiadas de los términos *punto*, *línea* e *incidente*, corresponden a los axiomas. Ello significa una gran distancia desde Euclides.

Sólo queda por añadir, a título de observación, y por lo que afecta al área de conocimientos de Expresión Gráfica, la influencia que ha debido tener, y sin duda en muchos casos ha tenido, sobre la misma el desarrollo de la informática. Desarrollo que, en general, ha repercutido en todas las disciplinas, incluida la matemática en sí, pero en particular en la expresión gráfica tecnológica, tema que puede ser tratado con mayor profundidad.

Pudiera parecer que no existe nexo de unión entre el desarrollo de esta tecnología y el "renacer" del grafismo, como consecuencia de su ruptura respecto al hacer matemático, pero si bien se ha dicho que el principal problema que desembocó en el abandono de la práctica sintética en 1875 era la dificultad de manejo de la propia práctica en sí, por la naturaleza de las herramientas que la posibilitaban, éstas son hoy muy distintas permitiendo la resolución de problemas de forma menos laboriosa y más práctica, he de insistir que el concepto sigue siendo el mismo, o sea, el objeto de estudio no cambia, sólo, en este caso, el método para tratarlo y materializarlo.

El área de Expresión Gráfica en la Ingeniería, hoy en día, lejos ya de ser considerada únicamente como herramienta de trazado de planos técnicos, aplicación que es y seguirá siendo importante, pero también, que su tratamiento debe ser adaptado a las tecnologías actuales, infiriendo en cualquier rama de la técnica, aportando nuevas y prácticas soluciones a los problemas técnicos desde el punto de vista de lo sintético. Y desde este punto de vista, ha de ser considerada con un amplio abanico de posibilidades de aplicación.

3 La geometría en el arte

Fig. 24 Proporciones en el rostro.

Como ya hemos comentado, Vitruvio, que vivió varios siglos después de Euclides, escribió los diez libros de arquitectura. En ellos menciona la geometría como un valiosísimo instrumento para los arquitectos y dedica un espacio significativo al estudio de las proporciones humanas, tema que surge en unos comentarios referentes a la simetría.

Dice Vetruvio que la simetría proviene de la proporción, de una correspondencia entre las medidas de los miembros de una obra entera y del conjunto con respecto a cierta parte seleccionada como modelo, el módulo. Sin la simetría y la proporción no pueden existir principios en el diseño de un templo.

Damos aquí las proporciones de Vitruvio, el cual afirma que «el cuerpo humano está diseñado por la naturaleza de tal forma que la cara, desde la barbilla hasta la parte superior de la frente

y las raíces inferiores del cuero cabelludo, es la décima parte de la altura entera; con la mano abierta, desde la muñeca hasta la punta del dedo corazón, ocurre exactamente lo mismo; la cabeza, desde la barbilla hasta la coronilla, es una octava parte, y con el cuello y un hombro desde la parte superior del pecho hasta las raíces inferiores del cuero cabelludo, es una sexta parte; desde el centro del pecho hasta la cima de la cabeza, es una cuarta parte.

Si tomamos la longitud de la cara como nuestra medida de unidad, la distancia desde la parte inferior de la barbilla hasta la parte inferior de las fosas nasales es una tercera parte de la cara; existe la misma distancia desde la parte inferior de las fosas nasales hasta una línea entre las cejas; y desde este punto hasta las raíces inferiores del cuero cabelludo, o sea la frente, existe también una distancia igual a la tercera parte de la cara.

La longitud del pie humano es una sexta parte de la altura del cuerpo; la longitud del antebrazo es la cuarta parte, y la amplitud del pecho es también una cuarta parte. Los otros miembros del cuerpo también tienen sus proporciones simétricas y, gracias a servirse de ellas, los grandes escultores y pintores de la antigüedad consiguieron fama y prestigio...” (Fig. 24).

Recordemos que ya Platón había comentado que “Dios geometriza”, y fue citado a menudo por los físicos teóricos de principios de siglo que estaban ocupados en fabricar modelos del átomo (Fig. 25).

En la arquitectura clásica, las columnas son de tres tipos: Corintio, Jónico y Dórico. Y Vitruvio da todos los detalles necesarios acerca de su historia y diseño (Fig. 24b).

El primero de los órdenes arquitecturales fue el Dórico. Cuenta la leyenda que se tomó la medida del pie de un hombre, se descubrió que medía la sexta parte de su altura total, y se aplicó esta proporción a la edificación del fuste entero, incluido el capitel. De esta forma nació la columna dórica, que exhibe las proporciones, la fuerza y la belleza del cuerpo masculino... y luego, cuando quisieron construir un templo en honor a Diana, en un nuevo estilo de belleza, tradujeron estas pisadas a términos característicos de la esbeltez de las mujeres y construyeron una columna cuyo grosor medía solamente una octava parte de su altura para que diera la impresión de ser más alta.

La altura del capitel jónico medía solamente la tercera parte del grosor de la columna, mientras que la del capitel corintio era igual al grueso entero. Y se basó evidentemente en el acanto, que es, posiblemente, el diseño más elaborado en toda la historia del arte decorativo.

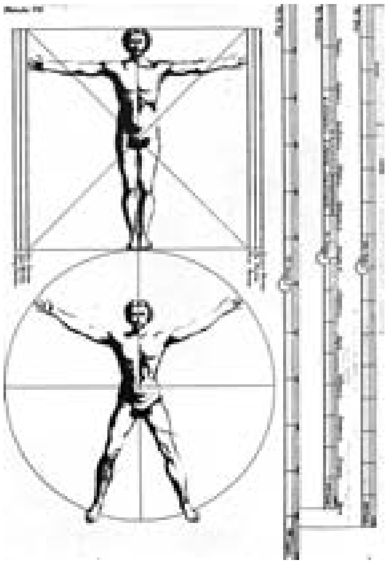


Fig. 24a

Fig. 24b

Fig. 25

En el Renacimiento la teórica de la perspectiva puede proceder fácilmente de ciertas reflexiones geométricas. Pero la perspectiva práctica usada en el dibujo se originó, naturalmente, como un conjunto de normas. No tenía nada que ver con el análisis matemático acerca del proceso de la visión conocido en la Antigüedad como la óptica: Euclides postuló que se perciben los objetos por medio de unos rayos rectos que convergen en el ojo, de forma que cabe considerar al sistema visual como una pirámide, con el ojo como vértice y el objeto como base, pero no hizo el menor intento de tratar sobre los problemas de la representación artística. Durante siglos, a nadie se le ocurrió la idea de intersectar la pirámide de la vista con un plano o sea con la tela.

Le correspondió a Brunelleschi formularla. La perspectiva es la teoría de la visión del artista de un solo ojo (Fig. 26).

Es Durero, en el "Underweysung" quien expone que la perspectiva no es una disciplina técnica destinada a quedarse al servicio de la pintura o de la arquitectura, sino que es una rama importante de las matemáticas, capaz de evolucionar.

Por otra parte, en su segundo libro, nos enseña a trazar polígonos regulares. Su interés se explica por sus aplicaciones durante la Edad Media en la decoración islámica y gótica, y, después de la invención de las armas de fuego, en la construcción de fortificaciones.

Los arquitectos del Renacimiento ya conocían la proporción áurea ya citada en relación con la construcción euclidiana del pentágono regular, pero no se sirvieron de ella de forma eficaz como instrumento de proporción (ver la unidad de proporcionalidad). Y Piero della Francesca y Luca Pacioli, en sus estudios sobre los cinco sólidos regulares platónicos, habían asimilado toda la teórica euclidiana, refiriéndose a la proporción áurea como la "Divina proportione" (Fig. 27) y se cree que el término "proporción áurea" se originó en Alemania durante la primera mitad del siglo XIX, siendo su relación $m = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$

Fig. 26

Fig. 27a

Pero algo cabe decir en favor del atractivo estético de determinadas proporciones, entre ellas la proporción áurea, y vamos a examinar lo que dice P. H. Scholfied en su libro *The Theory of Proportion in Architecture* (Cambridge University Press, 1958) a este respecto.

En la figura 28a vemos un rectángulo dividido en dos rectángulos por una línea paralela a dos de los lados. Comparamos las formas del rectángulo con las formas de los dos rectángulos en los que lo hemos dividido. En general, las tres formas son diferentes, pero existen métodos para eliminar una de ellas. En la figura 28b uno de los rectángulos menores es similar, en cuanto a forma, al rectángulo original. Los lados del rectángulo son x^2 y x, de modo que la relación es x, y la división realizada en el lado más largo se encuentra a una distancia 1 (unidad) del borde. La relación para el rectángulo menor es, por lo tanto, también x: 1 = x, de modo que este rectángulo tiene la misma forma que el rectángulo original, cualquiera que sea el valor de x. Vemos que las dos diagonales trazadas en la figura son perpendiculares.

En la Figura 28c, el rectángulo original está formado por lados iguales a x2+1 y x, y también aquí la división es una unidad a partir de uno de los extremos. Ahora, los dos rectángulos formados por la división son similares entre ellos, con la relación entre los lados x: 1 = x, pero no son necesariamente similares al rectángulo original. En la Figura 28e, los lados del rectángulo son 2x y 1, y la división se ha realizado en el punto medio, de modo que los dos rectángulos obtenidos son idénticos.

Podemos eliminar ahora dos de las tres formas presentes en cada figura si volvemos a examinar la Figura 28b y escribimos:

$$1/x = (x^2 - 1)/x,$$

lo que nos da la ecuación $x^2 = 2$. Si tomamos ahora $x = \sqrt{2}$ la Figura 28b se transforma en la Figura 28d, en la que los tres rectángulos tienen todos la misma forma, y las diagonales trazadas en los rectángulos menores son perpendiculares a la diagonal trazada en el rectángulo original.

Si nos esforzamos en hacer que los tres rectángulos de la Figura 28e tengan la misma forma, volveremos a obtener la Figura 28d. Estarás de acuerdo en que el ojo sí responde a la similitud de las formas en la Figura 28d.

Proseguimos esta investigación de las formas simples y vamos a examinar un rectángulo dividido por líneas paralelas en ambos lados, como en la Figura 29a. Si los contamos, vemos que hay *nueve* rectángulos de diferentes formas en esta figura. En la Figura 28b, una de las divisiones es una división central, lo que reduce el número de formas diferentes de nueve a seis. Si se examina la cuestión de reducir todavía más el número de las distintas formas, existen tres casos en lo que el número de formas diferentes se reduce a *tres*. Estos casos pueden verse en las Figuras 29c, d y e, donde $m = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, la proporción áurea. Al comprobar la similitud de las formas, es útil servirse de la propiedad $1 + m = m^2$, correspondiente a la proporción áurea.

Existe también un caso, que puede verse en la Figura 29f, donde no existe ningún eje de simetría vertical ni horizontal, sino tan sólo un eje de simetría diagonal. La forma original es un cuadrado. Hay tres cuadrados en la figura, y seis rectángulos, dos de los cuales tienen por lados la relación $1 + m = m^2$; los otros cuatro tienen la relación m.

No cabe duda de que la proporción áurea parece tener algunas propiedades atractivas, y vamos a proseguir el estudio de sus propiedades matemáticas.

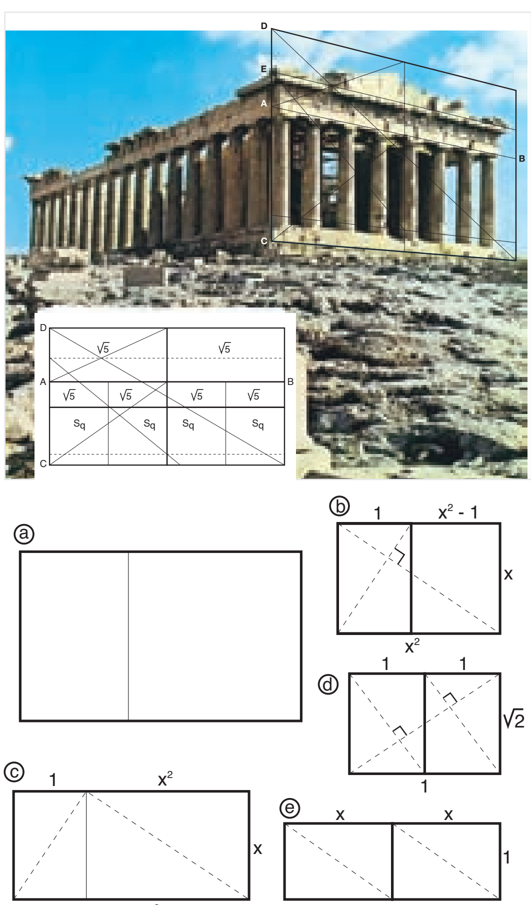


Fig. 28a

Si consideramos la progresión geométrica

$1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, \ldots, m^n, \ldots$

luego, ya que

$m^3 = m + m^2 = m + (1 + m) = 2m + 1,$

$m^4 = 2m^2 + m = 3m + 2,$

$m^4 = 3m^2 + 2m = 5m + 3,$

y así a continuación, vemos finalmente que, a partir de $m^n = m^{n-1} + m^{n-2}$, los coeficientes de m que obtenemos cuando expresamos potencias de m en términos de m son una serie de números enteros 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... en los que, si u_n es el término *n* (avo) de la serie,

$$u_n = u_{n'-1} + u_{n'-2}.$$

Así, empezando por el tercer término, 2 = 1 + 1, y luego 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3, 13 = 8 + 5, y el próximo término de la serie es: 21 = 13 + 8, etc.

Este conjunto de números tiene un largo historial y es denominado *serie de Fibonacci*. Leonardo de Pisa tropezó con ella en el año 1202, en relación, nada menos, que con la cría de conejos, y le dio el apodo de Fibonacci, "hijo de buen carácter", y este nombre ha quedado asociado a la serie. Partió de la suposición de que los conejos viven sempiternamente, y de que cada mes cada pareja concibe una nueva pareja, que a su vez es productiva a la edad de dos meses. En el primer mes, el experimento se inicia con una pareja recién nacida de conejos, por lo que apuntamos el número 1. En el segundo mes hay todavía una sola pareja, por lo que apuntamos 1 de nuevo. En el tercer mes, nace una pareja, por lo que apuntamos el número 2. En el cuarto mes tenemos 3 parejas, en el quinto 5 parejas, y así sucesivamente, y es fácil ver como surge la siguiente relación:

$$u_n = u_{n'-1} + u_{n'-2}.$$

Es curioso que esta relación no fuese formulada concretamente por Leonardo de Pisa, sino señalada por Kepler cuatro siglos más tarde.

La proporción áurea, como vimos, surge con conexión con el pentágono regular, y por lo tanto, la serie de Fibonacci representa también un papel en todo, lo relacionado con los pentágonos regulares o los pentágonos estrellados. En la Figura 30 mostramos algunas de las diferentes proporciones en las que la proporción áurea está implicada, y que tanto intrigaron a Pacioli y a numerosos artistas y arquitectos desde entonces.

Son las *propiedades aditivas* de la proporción áurea las que tienen tanta importancia en el diseño. Cada vez que una nueva longitud u_n del diseño se traza igual a uu_{n-1}, donde la longitud $u_{n'-1}$ ya está trazada, existe la satisfacción de saber que $u_n = u_{n-1} + u_{n'-2}$ de modo que cabe adaptar unas a otras las partes del diseño.

Le Corbusier, cuyo sistema se amolda a un método defendido por muchos arquitectos, ya que se sirve de una escala, el Modulor, inventada por el propio Le Corbusier y que asegura la repetición de formas similares. El Modulor consiste en dos escalas, la *roja* y la *azul*. Las dimensiones de la escala azul son el doble de las de la roja, y las divisiones de cada escala se basan en la serie *u*, donde *u* es la proporción áurea. Por lo tanto, el Modulor no es solamente un instrumento de proporción arquitectónica, sino también un medio de asegurar la repetición de formas similares, como vimos en nuestro comentario sobre las diferentes formas que pueden hallarse en un rectángulo gracias a una líneas transversales horizontales y verticales (Fig. 31).

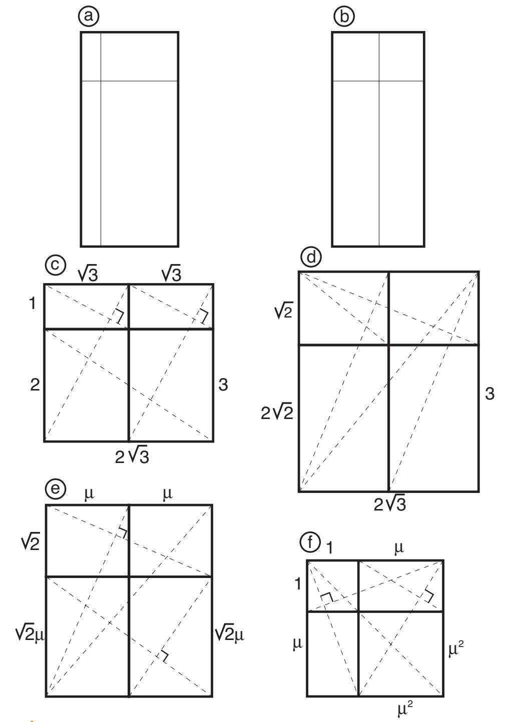


Fig. 29

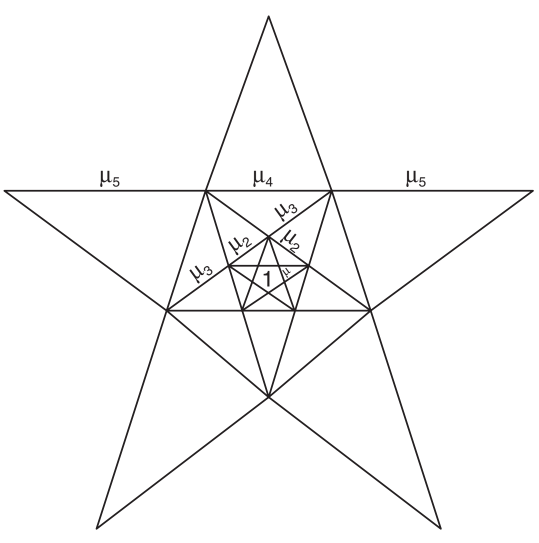


Fig. 30

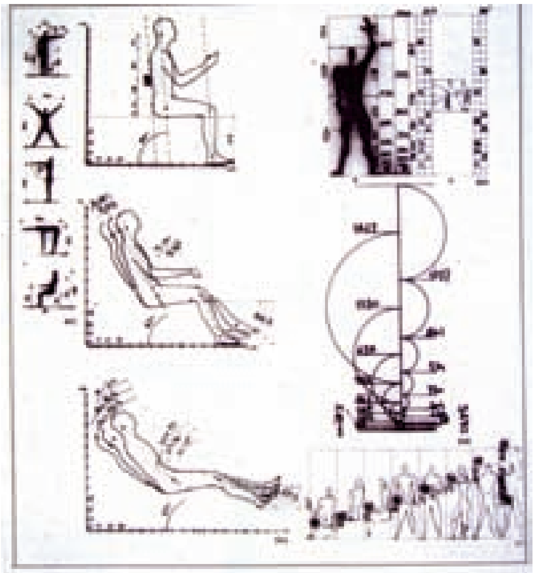


Fig. 31

La unidad de longitud de cualquier escala tiene su importancia, y vimos que el Modulor se basa en el cuerpo humano. Otro módulo usado por Le Corbusier es el de un hombre con el brazo levantado por encima de la cabeza. Estos módulos se usaron con bastante éxito en el diseño de muebles, además del de los edificios, y siempre deben recomendarse la aplicación de medidas antropométricas en el diseño de aquéllas. Muchos de los llamados muebles nórdicos –butacas, sofás, etc.–, parecen haber sido diseñados para uso de fenómenos acéfalos, ya que no tienen ningún sitio destinado a descansar la cabeza.

Le Corbusier tuvo mucho éxito y colaboró en el proyecto del edificio de las Naciones Unidas en Nueva York. Uno se pregunta si alguna vez leyó las obras de Vitruvio. Los proyectistas del gigantesco edificio de Manhattan hicieron caso omiso del hecho que el sol de la tarde, al entrar por las infinitas ventanas de las oficinas, calentaría de manera insoportable los interiores. Vitruvio, que se preocupaba mucho del bienestar humano, nunca habría cometido tal error (Fig. 32).

Fig. 32

4 El dibujo técnico aplicado al diseño

En Alemania, Redtenbacher, director de la politécnica de Karlsruhe, subraya en su obra "Principios", de 1852, la necesidad del diseño técnico para la construcción de máquinas:

"El diseño constituye para el mecánico un instrumento mediante el cual puede representar con claridad, agudeza y rigor sus pensamientos y sus reflexiones, de manera que no deje nada que desear. Una máquina diseñada es como una realización ideal de la misma, hecha con un material que cuesta menos y se deja tratar más fácilmente que el hierro y el acero.

Diseñar una máquina requiere un tiempo y un trabajo infinitamente inferior al necesario para construir efectivamente esa máquina con hierro y acero, especialmente si tenemos en cuenta las ventajas que un dibujo previo de la máquina presenta en orden a su posterior construcción (Figs. 33 y 34).

Una vez que se haya meditado bien sobre todo y se hayan establecido las dimensiones fundamentales por medio del cálculo o la experiencia, puede ya trazarse sobre el papel el proyecto de una máquina o una instalación y se puede someter a la crítica más sutil todo el conjunto y sus detalles con la máxima comodidad. Si se encuentra que el conjunto no resulta satisfactorio, se deja aparte el proyecto entero y se realiza rápidamente otro mejor. Si basta con reformar algunos detalles o particularidades, su sustitución puede llevarse a cabo con toda facilidad. Si desde un principio se albergan dudas sobre cuál es la mejor entre las distintas posibilidades, se pueden diseñar todas, compararlas entre sí y escoger la más oportuna.

Pero el diseño no es sólo enormemente importante para el proyecto, sino también para la misma construcción, puesto que en él se fijan de modo exacto y seguro las dimensiones y formas de todas las partes. La fabricación en sí se limita a construir con materiales sólidos cuanto en el dibujo se representa. Todas las partes constitutivas de la máquina pueden construirse por separado, con lo cual se consigue repartir el trabajo entre un gran número de operarios y organizar la construcción de manera que la totalidad de las labores a realizar puedan cumplirse a su debido tiempo, en el sitio más apropiado, con el mínimo de tiempo, dinero y materiales, y finalmente con una exactitud y seguridad que no dejan lugar a error.

Procediendo del modo descrito no es posible cometer equivocaciones graves, y en el caso de que se produzca alguna de vez en cuando, resulta fácil e inmediata la localización de su causa."

Sin embargo hasta finales del siglo XIX y principios del XX no se empiezan a sentar las bases de un diseño unificado que responda a las necesidades de la expansión industrial. Es ya en el siglo XX por primera vez, en 1917, se crean en Alemania las normas DIN, cuya finalidad es unificar y racionalizar diseños, medidas, fabricaciones, símbolos, etc. Estas normas han logrado imponerse poco a poco y hoy día, salvo raras excepciones, se usan en todo el mundo.

Estas normas han sido ampliadas por las normas ISO, las cuáles han alcanzado una implantación universal bastante estimable (ver el tema de normalización).

Si se compara un diseño de principios del siglo XX con los de la actualidad, se notará la evolución que ha sufrido para lograr una mayor claridad y sencillez (Fig. 35).

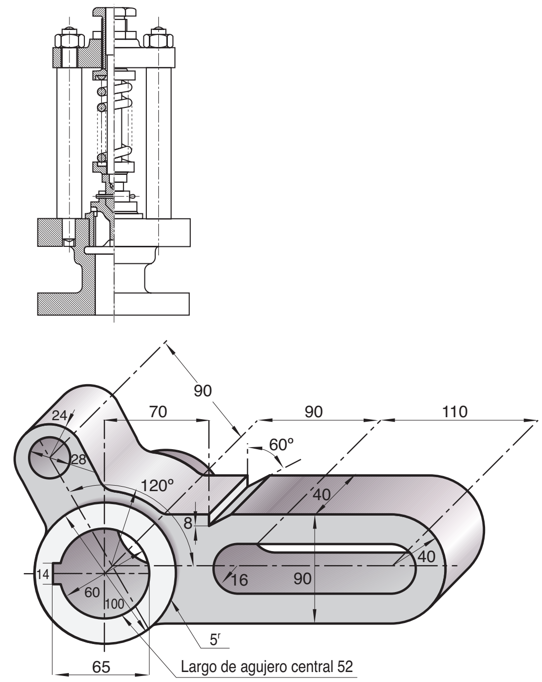


Fig. 33 a y b

Fig. 34

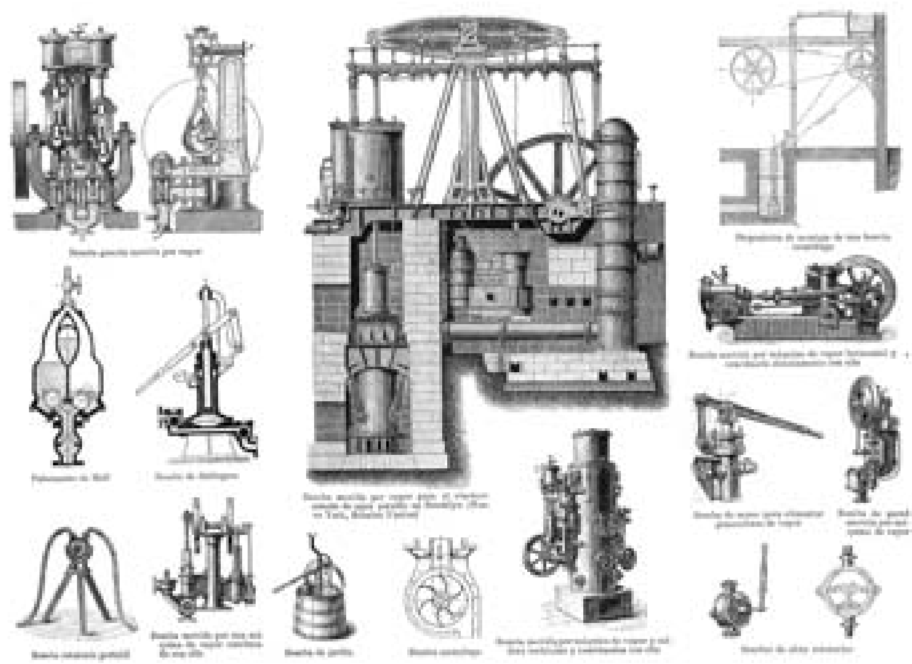


Fig. 35

El diseño, en su actual concepción, nace de una serie de inquietudes que tienen como punto común la revolución industrial, a partir de la cual, en casi todos los países, surgieron movimientos que reclamaron una estética apropiada para la industria y exigieron que ésta no intentase reproducir la artesanía o las artes aplicadas. Dio impulso a estas ideas Walter Gropius al fundar el "Bauhaus estatal de Weimar". (1919) (Fig. 36).

Fig. 36 a y b

"Sabemos que sólo los métodos técnicos de la realización artística pueden ser enseñados, no el arte. A la función del arte se le dio en el pasado una importancia formal que le escindía de nuestra existencia cotidiana, mientras que, en cambio, el arte está siempre presente cuando un pueblo vive de modo sincero y sano.

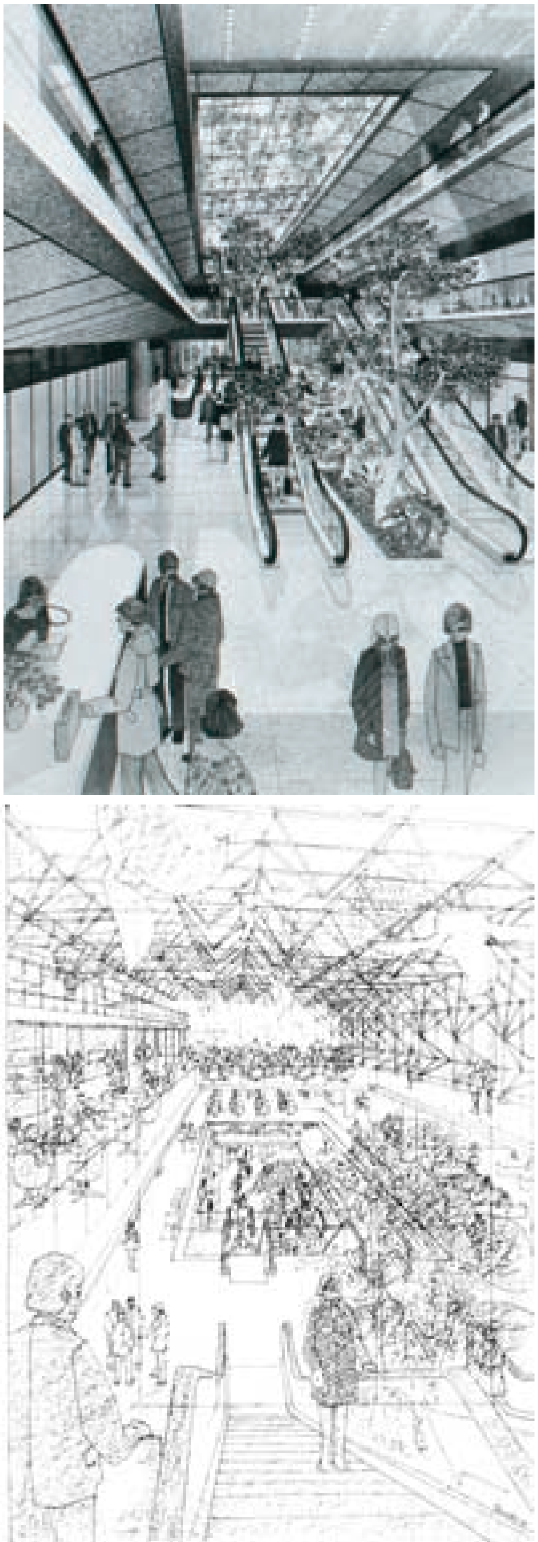


Fig. 37 a y b

“Por ello nuestro deseo es inventar un nuevo sistema de educar que pueda conducir –mediante una nueva enseñanza especializada de ciencia y técnica– a un completo conocimiento de las exigencias humanas y a una percepción visual de ellas.

“Así, nuestra intención es formar un nuevo tipo de artista creador, capaz de comprender cualquier género de necesidad: no porque sea un prodigio, sino porque sepa aproximarse a las exigencias humanas según un método preciso. Deseamos hacerle consciente de su poder creador, sin miedo a los hechos nuevos, en su propia labor independiente de toda fórmula.”

Como puede verse, los postulados de Gropius se han convertido en exigencias, pues mientras no se consiga su plena realización no se habrá logrado establecer el equilibrio entre el hombre y su entorno (Figs. 37 y 38).

Para R. G. Scott, “diseñar es hacer algo por una razón definida”. (**Fundamentos del diseño**, 1951). Y añade que “diseño es toda acción creadora que cumple su finalidad. Hacemos algo porque lo necesitamos, esto es, somos creadores. Ésta es la única elección que cabe en la vida: o limitamos nuestros deseos y necesidades para adaptarnos a lo que las circunstancias nos ofrecen, o utilizamos nuestra imaginación, conocimientos y habilidad para crear algo que responde a dichas necesidades. Como individuos hacemos tal elección en forma independiente y como grupo social, en conjunto. Todo lo que utilizamos se creó para llenar alguna necesidad”.

El diseño no sólo consiste en representar gráficamente un contenido, sino que incluye toda actividad creadora encaminada a la consecución de un fin. Diseñar es proyectar ideas y materializarlas en acciones y objetos. Es por ello que abarca casi todas las actividades humanas y así podemos hablar de diseño gráfico, industrial, comercial, arquitectónico, etc. (Fig. 39).

Fig. 38

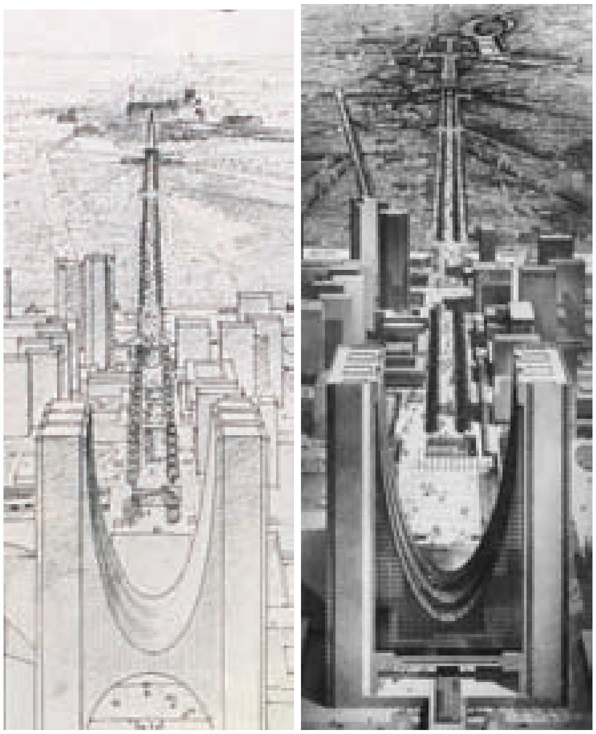


Fig. 39

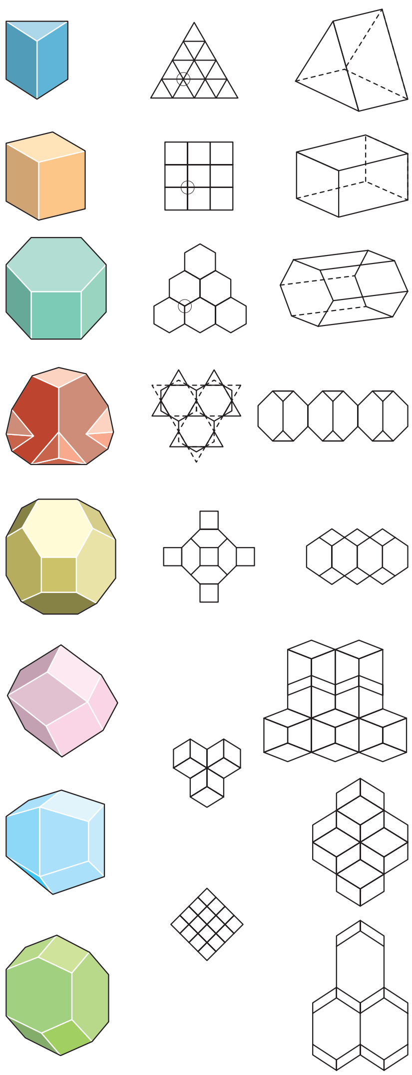


Fig. 40

La **forma** es la consecuencia lógica de todos esos factores, partiendo de sus propios principios o leyes, con visión de actualidad y sin paliativos ni adornos superpuestos e innecesarios siendo el *módulo* la estructura mínima que se repite indefinidamente. La sección plana de estas estructuras modulares produce las retículas planas (Fig. 40).

La *modulación* tiene un enorme campo de ampliaciones en el mundo del diseño en general y en la Arquitectura en particular. A este respecto la aplicación del Modulor de Le Corbusier y su posterior desarrollo realizado por el arquitecto español Rafael Leoz son de enorme interés. La Unidad de Habitación de Marsella, realizada por Le Corbusier según el Modulor (figura 31), es un inmenso edificio de 140 m de largo y 70 m de altura, pero que se nos presenta íntimo y familiar, ya que de la terraza al sótano, tanto por dentro como por fuera, está modulado de acuerdo a la escala humana (Fig. 41).

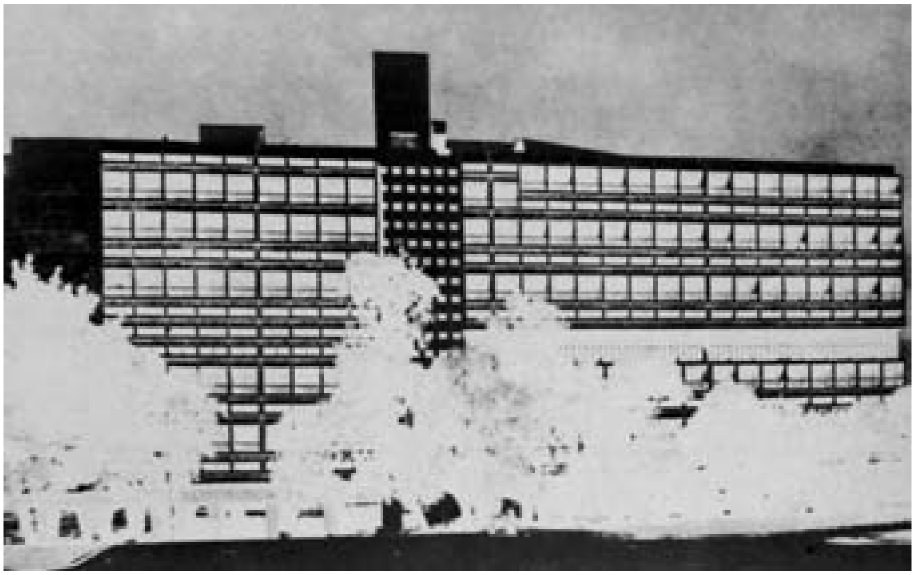


Fig. 41

5 Diseño Industrial. Conjunción de lo funcional y lo estético

Las condiciones para que un producto pertenezca al sector industrial son:

a) Que sea producido con medios industriales y mecánicos (intervención exclusiva de la máquina).

b) Su “interacción” (producción en serie) o repetibilidad.

El diseño nació en 1919 cuando Walter Gropius fundó la Bauhaus, el programa de esta escuela de diseño (que tuvo su antecedente en la Deustscher Werkbund) tendía a formar un nuevo tipo de artista; un artista útil a la sociedad, que cree obras de arte en los objetos de uso cotidiano (Fig. 42).

Fig. 42 a, b y c

Aspectos analizables del diseño

1.º Su carácter práctico-utilitario, que no siempre es indispensable (objetos "inútiles", "ornamentales", etc.).

2.º Coeficiente "estético": a veces ocurre que, aunque no haya propósito de forma estética, se dan ciertas constantes formales que sentarían las bases de un nuevo "estilo" (en el siglo XIX, puentes colgantes metálicos, edificios ingenieriles, coches, fábricas, altos hornos, máquinas a vapor, locomotoras).

3.º La abundancia de objetos (con su diseño correspondiente) que nos rodean, condiciona el "gusto" de una época, positiva o negativamente. (Fig. 43).

Fig. 43

4.º Carácter "iterativo" del diseño industrial-producción en serie: control, en cualquier momento, para asegurar la absoluta igualdad de los ejemplares producidos. La "serie" artesanal y la serie industrial el "modelo cabeza de serie" ("modelo normal", "standar" o "tipo").

Con la producción en serie desaparece el carácter de "unicidad" del producto (base de la valoración artística), así como también desaparece la presunción de que el artífice posee una habilidad manual especial, porque todo detalle ejecutivo está ya contenido en el proyecto realizado por el diseñador y no puede ser "añadido" luego por el eventual "toque" del artífice.

5.º "Serie pequeña": Locomotoras, buques, submarinos, máquinas electrónicas calculadoras gigantescas, instrumentos de alta precisión, etc.

6.º "Series grandísimas" de objetos: vajillas, electrodomésticos, etc.

7.º Concepto de "standard" (o de "muestra normal o prototipo") en virtud de dicho concepto, el objeto producido industrialmente debe concebirse como ya perfecto en el acto mismo de su producción y no ha de someterse a posteriores manipulaciones que mejoren o modifiquen su aspecto (Fig. 44).

Fig. 44

8.º Distinción entre artesanado y diseño industrial; el artesanado de antaño realizaba producciones parcialmente realizables en serie, juzgadas como de valor inferior (estéticamente hablando) al de las "artes puras": tazones, ánforas, vasijas de cerámica o vidrio, bordados, encajes, alfombras, tapices, etc., así como estatuillas de madera de carácter folklórico y las llamadas "artes aplicadas", como el mosaico, labrado del alabastro, el repujado, pirograbado y otras más.

Fig. 45

Fig. 46

Fig. 47 Le Corbusier.

(Fig. 46). Con la “era industrial”, el artesanado fue decayendo progresivamente. ¿Cuál es la diferencia? la obra artesanal, por su propia naturaleza, es obra que puede aparecer como “hecha a mano”, aun en el caso en que se dé la intervención parcial de una máquina. La obra de artesanía, aún cuando esté sometida a una repetición en numerosos ejemplares, nunca alcanza en todas sus copias la absoluta identidad de unas con otras. En esa misma imperfección formal consiste ese no sé que fascinador y la esencia misma de la forma artística. Por el contrario, en el objeto producido industrialmente, nunca se verifica tal eventualidad, ni debe verificarse (Fig. 46).

En resumen: el objeto industrial existe virtualmente desde el mismo momento en que fue proyectado; la obra del artista en la pieza de artesanía se explica “al final” de la elaboración, mientras que en la pieza industrial se explica “al principio”.

La obra de artesanía es “única” e “irrepetible”, como la obra de arte (escultura, pintura, etc.); no puede producirse en masa.

9.° La arquitectura industrializada y el diseño industrial: hay elementos de arquitectura moderna (curtain-Walls, nudos y juntas, cerramientos y otros elementos prefabricados) que forman parte del diseño, pero una vez englobados en el conjunto forman parte del todo.

Será posible, en un futuro no lejano, la planificación de la arquitectura, así como la estandarización de muchos de sus elementos, lo cual representará, socialmente, un abaratamiento de los costos realmente decisivo.

10.° Relaciones e interferencias entre el diseño industrial, la pintura y la escultura.

Tales relaciones se producen en tres fases: a) correspondiente a la primera revolución industrial: arquitectura ingenieril del pasado siglo, en la que las obras técnicas y mecánicas –puentes metálicos, máquinas de vapor, tejedoras y las de escribir– eran consideradas totalmente distintas de las “bellas artes”; a lo sumo se intentaba, a veces, “enmascarar” la máquina añadiéndole algunos adornos o introduciendo en su estructura elementos decorativos (capitales, columnillas). b) La segunda fase, es la llamada del art nouveau, que trató de crear objetos y arquitecturas, que a pesar de su elaboración mecánica, tuvieron también un coeficiente artístico. A esta época corresponde la escuela bauhausiana y neoplástica que afirma que el objeto industrial y la arquitectura con los nuevos materiales deberían estar sometidos al binomio “utilidad-belleza” coincidencias “estilísticas” entre algunas pinturas de Mondrián, Van Doesburgh, Malevic, etc., las esculturas de Pevsner, Arp y Gabo y los objetos producidos industrialmente (muebles de Rietveld, Le Corbusier, Mies, Brener, etc.). Había no obstante en esta segunda fase un sometimiento exagerado a lo “funcional” (Fig. 47) contra el que reaccionó progresivamente la pintura y la escultura de la postguerra, creando nuevos modos más libres e irracionales, como el “informalismo”, el “tachismo”, la “action painting” norteamericana y otras corrientes neodadaístas.

Este último movimiento plástico, profundamente opuesto al racionalismo constructivista, no podía tener relación alguna con el diseño industrial, sin embargo, es posible concebir también el diseño industrial en función de una creación de obras “artísticas” no utilitarias que hallarán en el futuro amplias aplicaciones en publicidad, amueblamiento, decoración, señalizaciones.

11.° Información y “consumo” del diseño industrial

El objeto industrial, precisamente por su naturaleza, estrictamente ligada al uso y sometida a un precoz “consumo” se presta, más que ningún otro, a ser estudiado según las reglas de esta última teoría.

El objeto industrial, será considerado, pues, igual que cualquier otro mensaje capaz de proporcionarnos un determinado coeficiente informativo. Como la teoría de la información se basa esencialmente en el cálculo de la cantidad de información presentada por el mensaje dado, fácil será convencerse de que la información misma valdrá tanto más cuanto mayor sea la imprevisibilidad del contenido de tal mensaje.

Puesto que la información proporcionada por un mensaje dado depende de su "originalidad", se comprende fácilmente que el grado de información de ese mensaje puede equivaler al grado de sorpresa que causa su imprevisibilidad e improbabilidad; así, pues, en lo que se refiere al diseño industrial, su "novedad", es algo fundamental para obtener una información de alto grado, es decir, presentar a los ojos del consumidor una solicitación muy fuerte a que adquiera el objeto. Cuanto más nuevo, más insólito, más inédito sea el objeto lanzado al mercado, tanto más fácil e intensa será su adquisición por los compradores; apenas haya aprendido la forma de su "novedad", tan pronto se haya "consumido" su cualidad comunicativa, disminuirá su valor no sólo estético sino, sobre todo, informativo.

Fig. 48 Bolígrafo Bic.

12.° Valor expresivo y simbólico del objeto industrial.

Hauger, Morris, Cassirer, etc., opinan que la obra de arte debe considerarse como "simbólica" de algo, en concreto como "simbólica del sentimiento" humano. En cuanto al objeto industrial, el simbolismo podría definirse como "funcional" que se identifica con la funcionalidad del objeto... son objetos cuya primordial razón de ser es la de "funciona" junto con la de llamar la atención del consumidor mediante sus específicas y concretas calidades formales. Casi todos los objetos industriales –desde el teléfono hasta el muro cortina, desde el bolígrafo hasta el jet– contienen cualidades formales que simbolizan su función para hacer que el objeto resulte más fácilmente identificables. Unas veces se exalta el formalismo funcional, pero otras, se enmascara u oculta (caso del motor en el automóvil), o bien, todo lo contrario: se decora, hasta recargar de ornamentación el objeto (los antiguos aparatos de radio) este estilo se extiende entre las dos guerras. Hacia 1944 aparece en Italia uno de los primeros ejemplares de aparato moderno de radio: el "Phonola" de los hermanos Castiglione (Fig. 49).

Fig. 49 Transitor.

13.° El "Styling": sus aspectos positivos y negativos.

La crisis de 1929. Entre los años 1920 y 1935 surgen en USA potentes organizaciones de estudiosos cuya principal tarea consistía en estudiar la mejor manera de "hacer deseables" o atractivos los productos ya gastados por el uso.

El "styling" fue combatido por los diseñadores europeos, a cuya cabeza figuraba la Bauhaus de Gropius. Sin embargo, el styling aportó innovaciones interesantes (el tubo metálico sinuoso) en lugar del tubo metálico anguloso), el "styling" podría considerarse como una especie de subcategoría artística cuyo valor estético es tan solo aleatorio, pero que como respuesta a las exigencias de las mesas, es de primordial necesidad.

14.° El diseño industrial en la sociedad "competitiva" y en la "socialista".

15.° El concepto de "fuera de serie".

Este concepto no choca con el típico "estilo" del momento, sino que lo secunda y acentúa, es solamente un género que lleva a sus últimas consecuencias la "línea" puesta de "moda" y la hace más dúctil y eficaz mediante el empleo de materiales y detalles mejores, lo de "fuera de serie" constituye el último capítulo de una determinada moda. La adopción de objetos de uso, ya muy "pasados de moda" tiene un sentido "afectivo", esnobista y de diferenciación social.

Fig. 50 Pluma.

Fig. 51 Ferrari.

Fig. 52 Cafetera.

16.º Los equívocos de la “pequeña serie”:

a) Objetos de carácter supraindividual (los jet, grandes aviones a reacción, navíos, locomotoras, grandes calculadoras electrónicas, turbinas, etc.) en los que el diseño interviene en mínima proporción.

b) Objetos de “excepción”, producidos en cantidades muy reducidas para aumentar su valor (productos de alta moda, enseres y muebles de lujo, objetos ornamentales para la casa: ceniceros, lámparas, picaportes, muebles “firmados”), todos ellos de precio muy elevado (Fig. 51).

17.º Valor publicitario y autopublicitario del objeto industrial.

En el caso del diseño industrial tenemos el ejemplo típico de una forma artística (o para-artística) que trata de publicarse a sí misma en el producto y, a la vez, de dar publicidad en sí misma en el producto. El diseño industrial posee, además del aspecto anterior, el de un “simbolismo presentador”, o sea, un elemento simbólico que tiende a poner de relieve las características apropiadas para hacer el objeto apetecible al consumidor.

El fenómeno publicitario es uno de los medios de información más vastos y difundidos de que dispone el hombre en la actualidad.

La continua originalidad, improvisibilidad o ingeniosidad son consustanciales con el fenómeno publicitario.

18.º Importancia del factor técnica.

Con gran frecuencia, el proceso de fabricación lleva a modificar substancialmente la forma y determina no sólo importantes transformaciones funcionales, sino decisivas modificaciones formales (ejemplo del procedimiento de la fusión o fundición, y el de la soldadura). En realidad, siempre rige el principio de no “traicionar” al propio médium expresivo, y por lo tanto, no adoptar cuando se sigue un método de elaboración diverso, expresiones formales que otro método anterior, y quizás opuesto, hacia necesarias. Tal vez sea el sector del mueble el que más refleja las profundas transformaciones del factor técnico.

19.º Investigación y mercado, sistemas de venta:

Sumisión de la producción industrial a las férreas leyes que rigen el mercado al que se le destina, por lo cual, todo análisis estético deberá ir acompañado de una investigación económica y de mercado (Investigaciones: sistemas estadísticos, “Gallup” y “Doxa”; muestreos de población, coloquios individuales llevados por hábiles cuestionarios con personal especializado).

El sondeo de mercado se extiende, cada vez más, al mismo tiempo que se van adoptando las convenientes prácticas y campañas publicitarias.

Es importante saber si el producto se destina a la serie pequeña, a la serie media o a la gran serie. Asimismo, es importante saber si la “magnitud” de la serie depende del hecho de que la demanda es aún restringida por razones económicas y por escasa difusión y popularidad del producto o quizá por pertenecer el producto mismo a aquellas categorías “supraindividuales” de que antes se habló.

En el caso “supraindividual”, la forma externa no posee gran importancia, no así el producto destinado al consumo masivo (en este caso, la apariencia externa, calor, etc., serán muy esenciales). La competencia, medios de venta (sistemas de distribución: agentes, supermercados, etc.).

20.º Diseño industrial y “mass media”.

Música retransmitida por la televisión y la radio; el teatro y el cine a través de los mismos canales... y en su difusión masiva; las formas seudoartísticas (como los tebeos, las fotonovelas, etc.) que alcanzan tiradas antes desconocidas... Las obras destinadas a este nuevo tipo de "función de masas" deberían responder necesariamente a algunos requisitos de gusto y de nivel artístico, o idóneo para ser comprendidas por todos. Esto es un problema esencial de los "mass media" (medios de comunicación de masas), pues se hace necesario introducir en ella formas artísticas antes destinadas solamente a las élites o grupos minoritarios. El problema de los países subdesarrollados o del "tercer mundo".

21.° Valores y límites del diseñador al proyectar.

Diferencias entre diseño ("dossing" y "draxxing") y dibujo artístico. El diseñador es un proyectista e incluso, un planificador del mismo proceso productivo.

Debe reagrupar, estudiar y sintetizar los datos a él suministrados por los diversos investigadores, técnicos, calculadores y expertos del mercado y de las técnicas operativas, de modo que puede sacar las conclusiones que le permitan fijar el tipo de producto que haya de proyectarse.

Le compete al diseñador el idear el objeto, de tal modo, que éste sea inmediatamente "comprensible" y "legible" para el consumidor; o sea, de modo que sus cualidades funcionales queden explícitamente semantizadas.

El proyectista restablece hoy (sociedad industrial), el contacto entre arte y público, es el artista de hoy, la persona que aúna lo funcional con lo estético.

Desde la fig. 47 te mostramos algunos de los hitos históricos del diseño en cualquiera de sus facetas.

Fig. 55 Silla Hormiga.

Fig. 53 Coca-cola.

Fig. 54 Medias de nylon.

PROYECTISTA

- **Diseño Visual**: Comunicación e Información Visual.
- **Diseño Industrial**: Proyecta objetos uso, según reglas de economía.
- **Diseño Gráfico**: Actúa donde aparezca la palabra.
- **Diseño Investigación**: Experimenta estructuras, medios, métodos y posibilidades combinatorias.

Fig. 56 Vespa.

Fig. 57 Escarabajo vw.

Fig. 58 Swach.

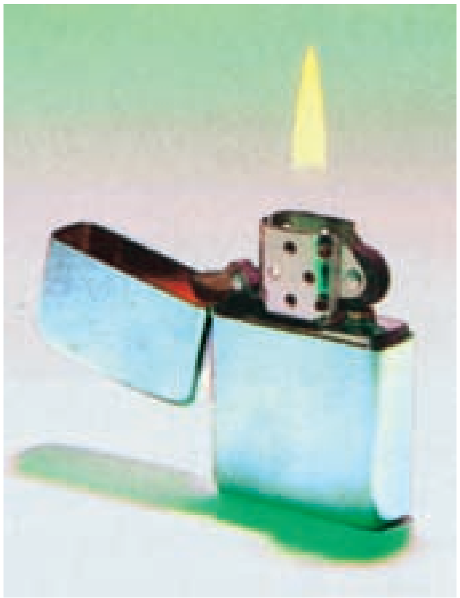


Fig. 59 Encendedor Zippo.

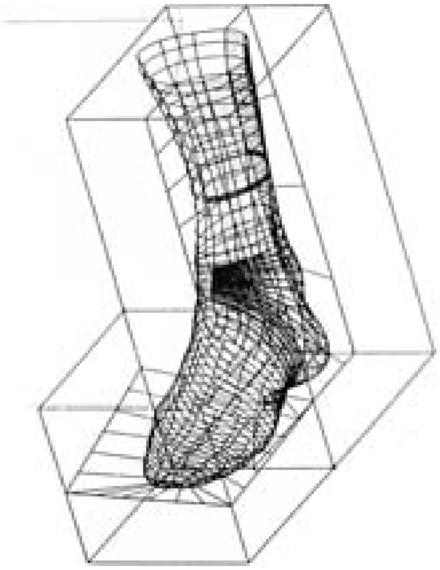


Fig. 60 Cad.

Fig. 61 La Minifalda.

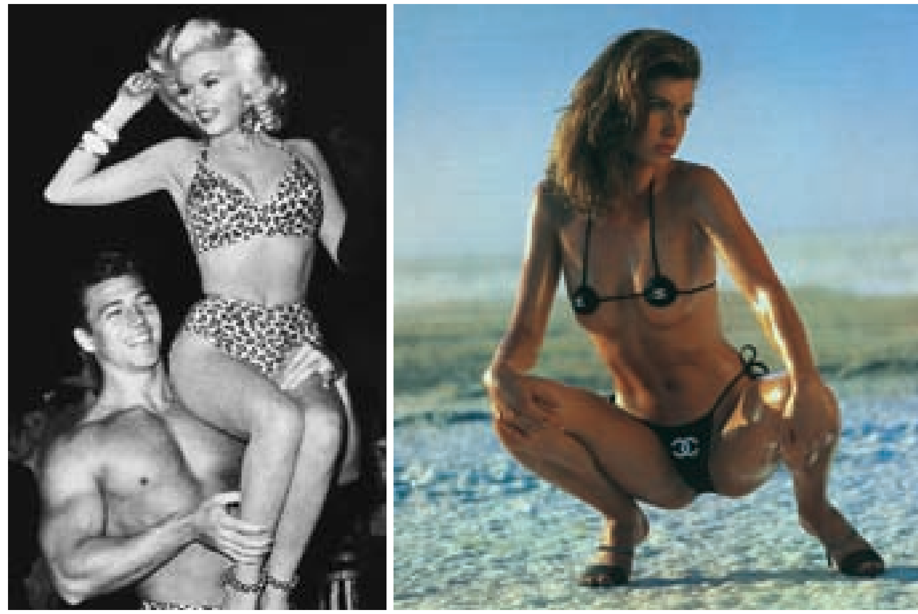


Fig. 62 El Bikini.

Fig. 63 Pañuelo Kleenex.

Fig. 64 Tarjetas de Credito.

Fig. 65 Sillón mariposa.

Fig. 67 Teléfono móvil.

Fig. 66 Maquinilla de afeitar Gillette

Fig. 68 Sillón Vassily.

Fig. 69 Ordenadores.

Fig. 70 Aviación Supersónica.

Fig. 71 Chupa-Chups.

Fig. 72 Walk-man.

Fig. 73 Olla a presión de Acero Inoxidable.

Fig. 74 Equipos Multimedia.

BLOQUE 1

Geometría

1 Trazados fundamentales en el plano

1.1 Trazados de rectas perpendiculares y paralelas

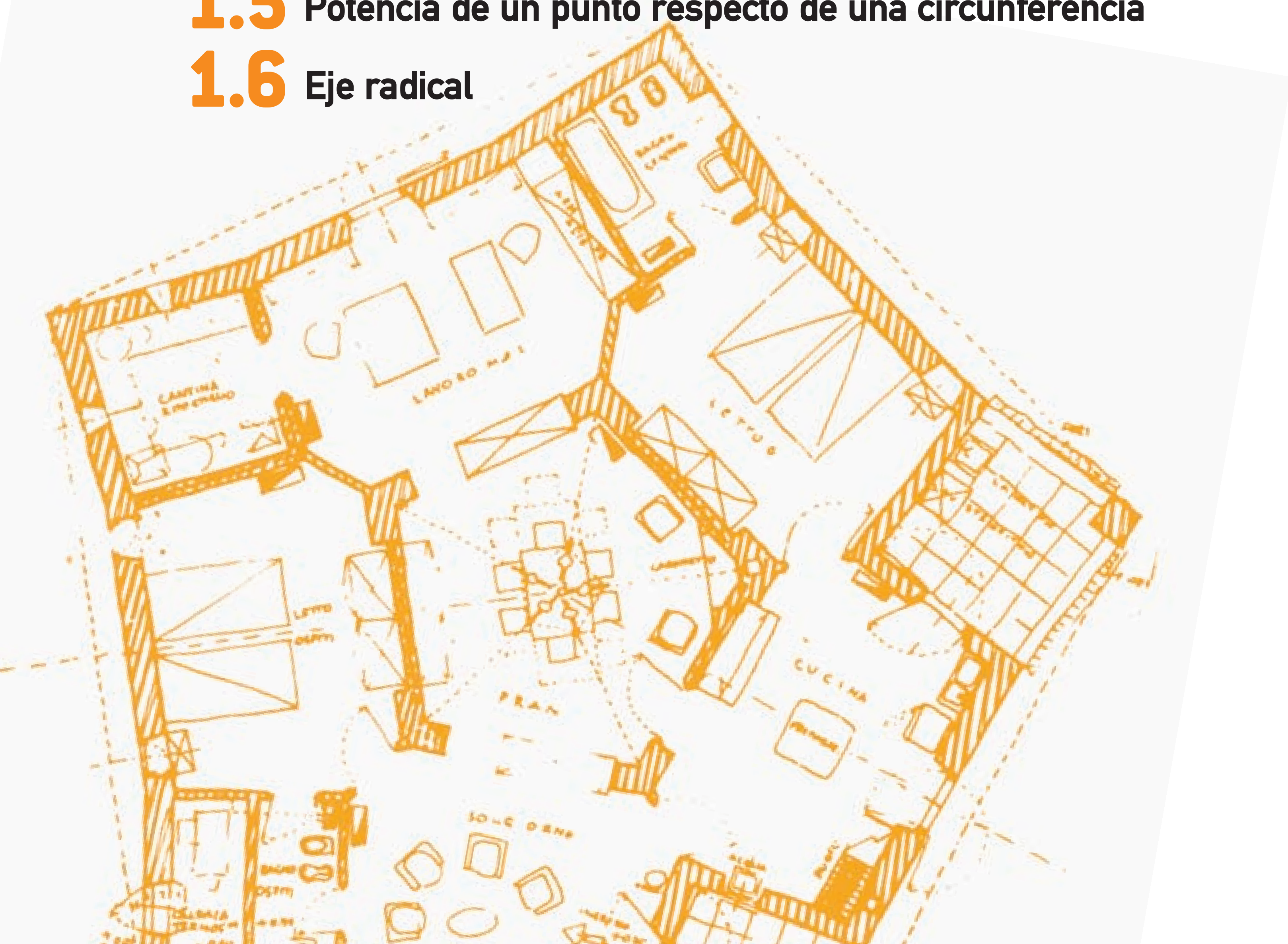
1.2 Operaciones con ángulos

1.3 Arco capaz

1.4 Rectificación de la circunferencia y arco

1.5 Potencia de un punto respecto de una circunferencia

1.6 Eje radical



1.1 Trazado de rectas perpendiculares y paralelas

Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman ángulos de 90°.

El trazado de estas rectas puede realizarse mediante diversos procedimientos:

A) Aplicando teoremas geométricos.

B) Con escuadra y cartabón.

Ⓐ Trazados de perpendiculares y paralelas mediante teoremas geométricos

Perpendicularidad

Los trazados básicos de perpendicularidad entre rectas derivan del teorema de la altura de los triángulos equilátero e isósceles. En estos triángulos la altura es la perpendicular que une el vértice opuesto con el punto medio de la base.

La construcción de perpendiculares se realiza aplicando este teorema de la altura.

- Así para trazar la mediatriz de un segmento, se considera éste como base de un triángulo isósceles **A B**. Los vértices de los respectivos triángulos isósceles **V**, **V'**, **V'_1**, **V'**, pertenecen a la altura que es perpendicular a la base. El punto **O** será necesariamente el punto medio de la base. (Fig. 1)
- Para trazar una perpendicular desde un punto exterior a una recta, se considera el punto como vértice del triángulo isósceles. Si con centro en **V** se describe un arco que corte a la recta en M N se determinará la base del triángulo isósceles. Bastará trazar otro punto **V'** como vértice de otro triángulo con base común **MN**. Los puntos **V-V'**, que pertenecen a la altura de ambos triángulos, definen la perpendicular. (Fig. 2)
- Si el punto **P**, por el cual hay que trazar la perpendicular, está situado en la recta, éste se considera como punto medio de la base. Basta con determinar **M N** equidistante de **P**, con centros en **M** y **N** se trazan arcos de cualquier radio para determinar **V**. **V-P** es la altura del triángulo. (Fig. 3)
- Cuando el punto **P** está situado en el extremo de la recta, se recurre a un trazado tradicional basado en dos triángulos equiláteros opuestos por la base **R S**, que generan un rombo (las diagonales de un rombo son perpendiculares). En la construcción de las figuras **A** y **B** puede observarse cómo se obtiene y puede comprobarse que la suma de los ángulos determina un ángulo de 90°. En la figura **C** la perpendicularidad se traza aplicando el teorema del arco capaz para un ángulo de 90°. Ver la fig. 24 de este tema. (Fig. 4)

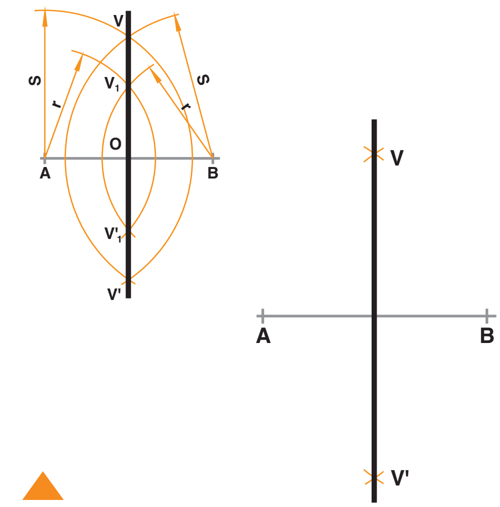


Fig. 1

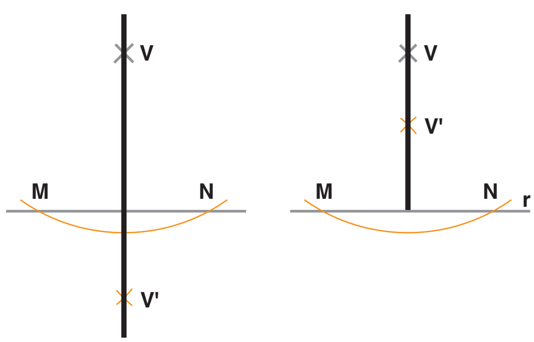


Fig. 2

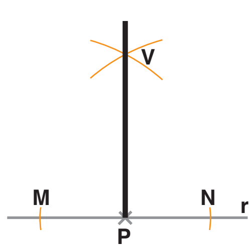


Fig. 3

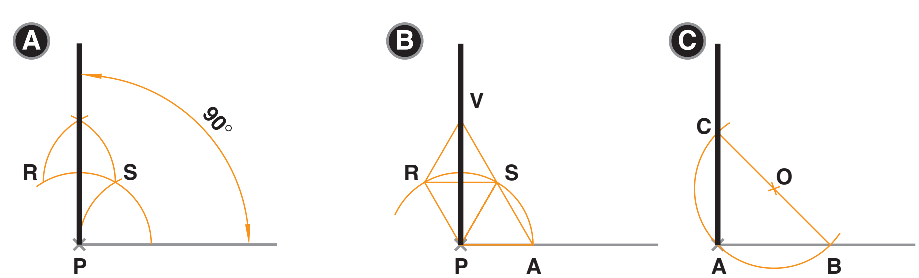


Fig. 4

Paralelismo

Dos rectas, en el plano gráfico, son paralelas cuando sus puntos son equidistantes entre sí.

Para trazar rectas paralelas bastará mantener esta equidistancia.

En el trazado de rectas paralelas existirán unos datos fijos, una recta a la que hay que trazar su paralela y un punto exterior que determinará la equidistancia.

Los ejercicios que resuelven el planteamiento se basan en la constante existente entre los arcos de la circunferencia y las cuerdas que abarcan dichos arcos. “A arcos iguales corresponden cuerdas iguales”.

- El ejercicio de la figura 5 está basado en este planteamiento, el punto **O** es centro de la circunferencia que tiene por radio **OP**. **MN** es el diámetro, trasladando la cuerda **MP** a **NP'**, los puntos **P-P'** mantienen la equidistancia respecto de la recta, en virtud de la igualdad de triángulos que se genera. (Fig. 5)
- Otro procedimiento basado en el mismo principio es el de la figura 6 que toma el punto **P** como centro de un arco de circunferencia, que al cortar a la recta determina el punto **M**, **P-M** es el radio. Si con radio en **P-M** y centro en **M** se traza otro arco, éste corta a la recta en **N**. Trasladando la cuerda **N-P** sobre **M-P'** se genera un paralelogramo romboide, por lo que la recta que pasa por **P-P'** es paralela a la recta dada.
- La recta **P-M** es secante a las dos paralelas que determina pares de ángulos iguales: alternos internos, correspondientes, alternos externos, etc. (Fig. 6b)

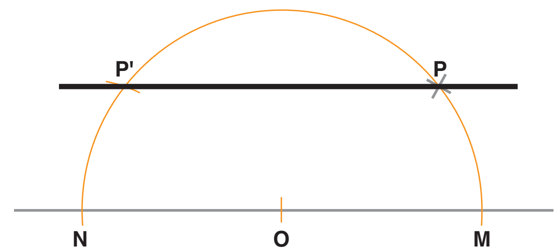


Fig. 5

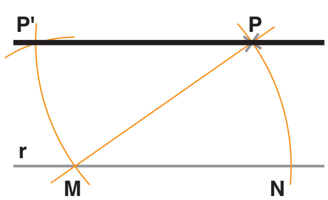


Fig. 6

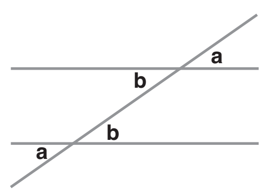
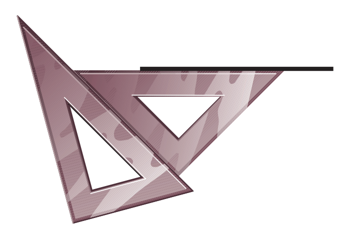


Fig. 6b



B Perpendicularidad y paralelismo de rectas trazados con escuadra y cartabón

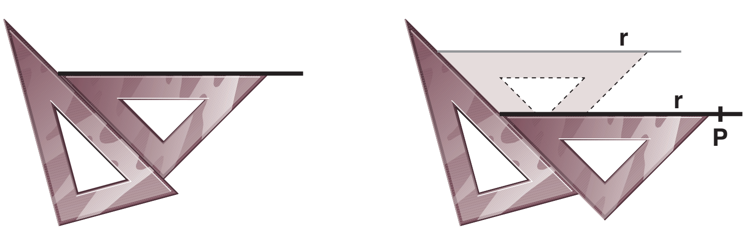


Fig. 7. Trazado de paralelas.

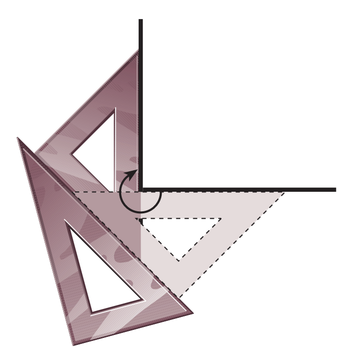


Fig. 7bis. Trazado de perpendiculares.

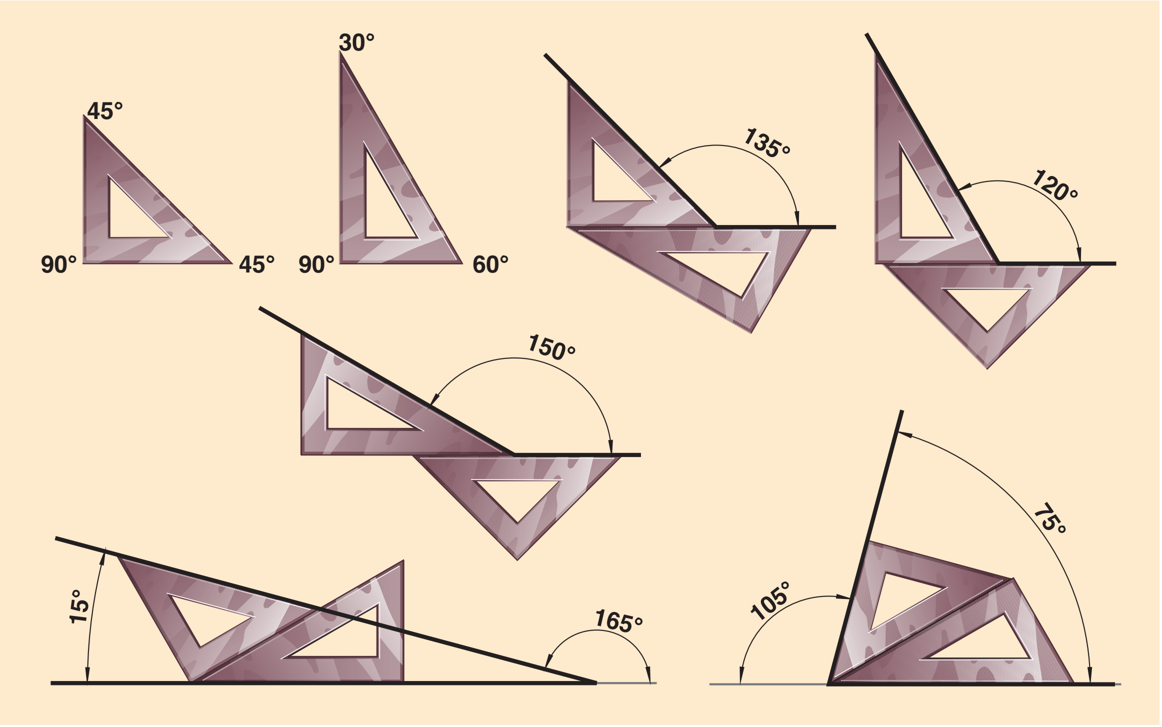


Fig. 8. Obtención de ángulos usando la escuadra y el cartabón.

1.2 Operaciones con ángulos

Las operaciones básicas con ángulos son: a) construir un ángulo igual a otro, b) sumar dos ángulos, c) restar ángulos, d) dividir ángulos.

La abertura de un ángulo viene determinada por la separación entre sus lados, y se expresa en grados. Los radios de una circunferencia abarcan una porción de los 360° de la misma. La abertura del ángulo está relacionada con la división de la circunferencia. Para determinar la abertura de un ángulo necesitamos los lados y una circunferencia que tenga su centro en el vértice del ángulo.

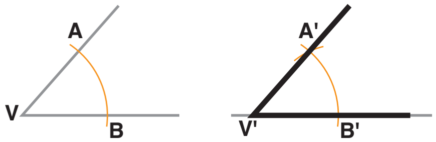


Fig. 9

- A la acción de construir un ángulo igual a otro se le llama transportar un ángulo, para ello en el ángulo dado se traza una circunferencia que tenga su centro en el vértice del ángulo a transportar, ésta determina los puntos **A** y **B** sobre los lados. En un punto de la recta **V'** tomado como centro, se traza una circunferencia de igual radio a la trazada en el ángulo que se quiere transportar, ésta cortará a la recta en **B'**. Se transporta la cuerda **AB** sobre **A'B'**. **V'A'** será el lado y ambos ángulos en **V** y **V'** serán iguales. (Fig. 9)

Suma y restas de ángulos

El sentido de la suma de los ángulos es hacia la izquierda. El sentido de la resta de ángulos es hacia la derecha.

Si se quiere sumar el ángulo (a) y el ángulo (b) se trazan arcos del mismo radio sobre ellos y la recta. Se transporta el ángulo (a) sobre **A'B'** y se transporta el ángulo (b) de forma que VC se yuxtaponga sobre el **V'B'**, siendo el ángulo (c) el resultado de la suma de (a) más (b). (Fig. 13)

Para restar (a) menos (b) se procede de forma análoga. Se coloca primero el ángulo más grande (a) y sobre V'B' se yuxtapone VD, el ángulo (c) es el resto entre (a) y (b). (Fig. 14)

Divisiones de ángulos

Para dividir ángulos puede utilizarse el círculo graduado o el semicírculo graduado. El ángulo puede dividirse en partes iguales siempre que el número de grados de éste sea divisible por el número de partes en que se quiera dividir. (Fig. 10)

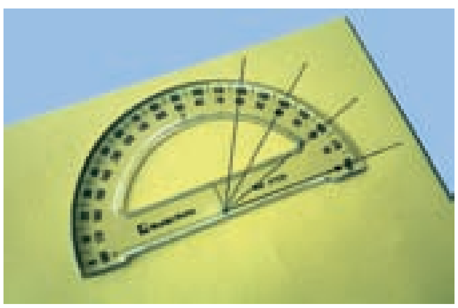


Fig. 10

En cambio dividir ángulos con arcos de circunferencia, mediante el compás, esto es más limitado, ya que, sólo permite dividir el ángulo por múltiplos de 2, mediante sucesivas bisectrices. (Fig. 11)

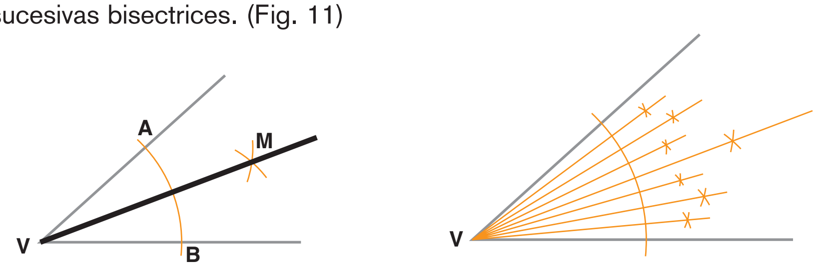
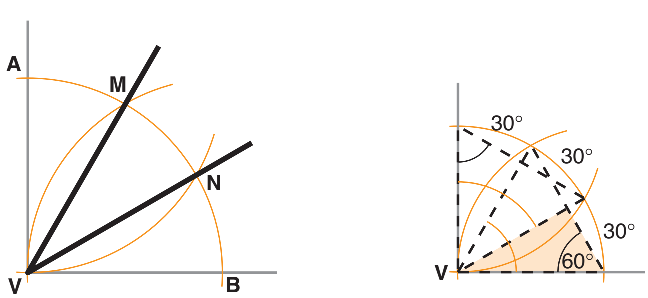


Fig. 11

La trisección del ángulo con arcos de compás solamente es posible en el ángulo recto, no siendo posible en el resto de los ángulos (Fig. 12). En el caso de querer dividir ángulos cualesquiera en tres partes iguales se recurre a la plantilla (Fig. 15) que resuelve el problema.

Fig. 12



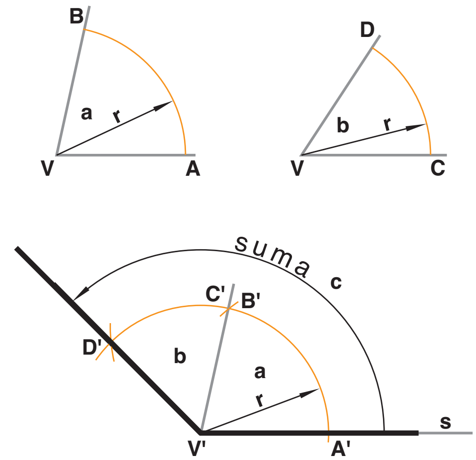


Fig. 13

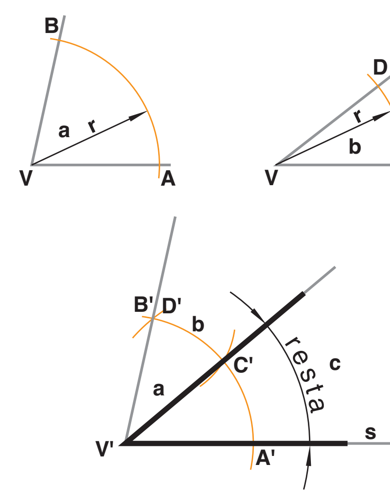


Fig. 14

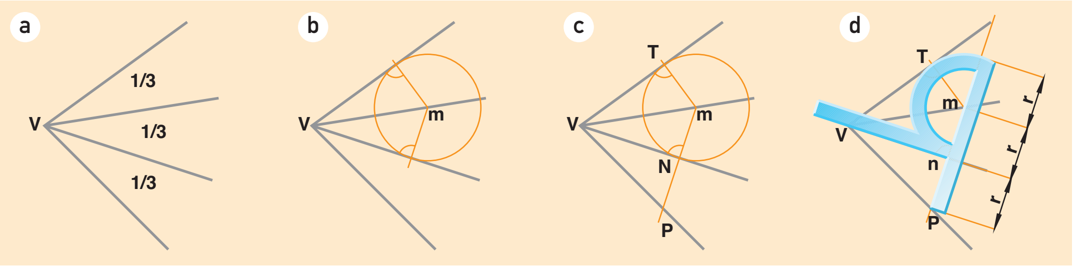


Fig. 15 Partimos de un ángulo dividido en 3 partes (a). En (b) se ha trazado una circunferencia tangente a los lados del ángulo formados por dos de las partes. Observa en la figura c que la circunferencia es tangente al ángulo en T y N, la prolongación de N determina el punto P. Comprueba en la figura d como la plantilla coincide con los puntos de la figura c.

Obtención de ángulos a partir de arcos con el compás (Fig. 16).

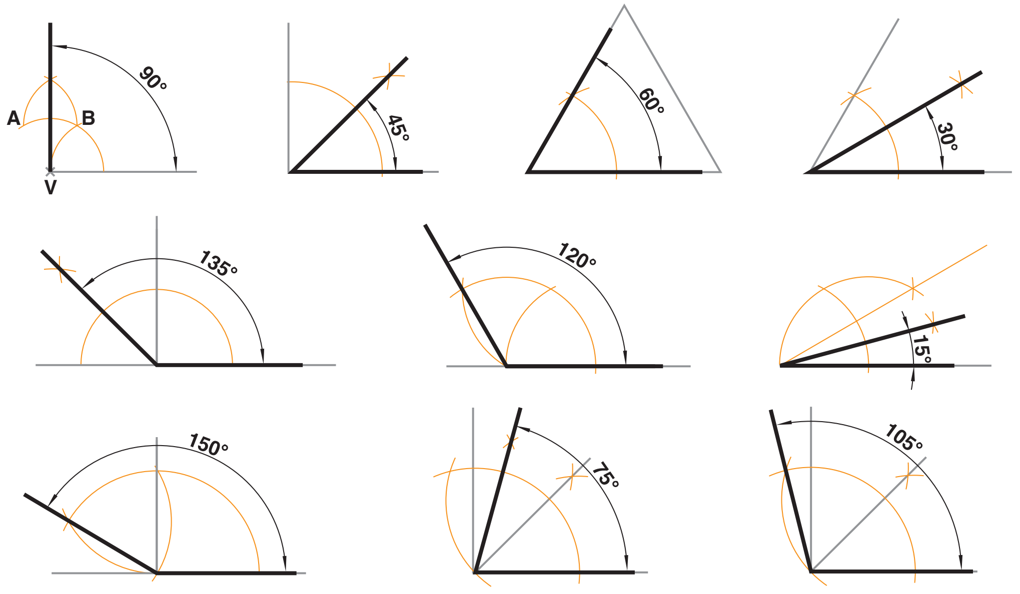


Fig. 16

Ejercicios

1. Hallar la mediatriz de un segmento A-B que mida 53 mm.
2. Dada una recta r y un punto exterior P, trazar una perpendicular desde el punto P a la recta.
3. Dada una recta r y un punto P situado en ella, trazar una perpendicular a la recta en el punto P.
4. Hallar la perpendicular en el extremo de un segmento.
5. Construir un ángulo igual a otro que mide 33°.
6. Hallar el ángulo formado por la suma de un ángulo que mide 34° con otro que mida 53°.
7. Hallar la bisectriz de un ángulo de 37°.
8. Dividir un ángulo recto en tres partes iguales.
9. Dividir un ángulo de 47° en tres partes iguales.
10. Con la escuadra y el cartabón construir un ángulo A de 75° y un ángulo B de 120°.

1.3 Arco capaz

Es el lugar geométrico cuyos puntos abarcan siempre con un mismo ángulo los extremos de un segmento de recta (Fig. 17). Este lugar geométrico es el arco de una circunferencia.

Para comprender esta definición se parte de las relaciones entre un ángulo y una circunferencia, así como de las constantes que se derivan entre sus ángulos.

Un ángulo está relacionado con una circunferencia cuando los lados del ángulo son secantes o tangentes a la misma.

El vértice del ángulo puede estar situado fuera de la circunferencia, en la misma o dentro de ella (Fig. 18).

Ángulos en la circunferencia

Las posiciones básicas que puede adoptar un ángulo respecto de una circunferencia son:

Ángulo central.	Cuando el vértice del ángulo está situado en el centro de la circunferencia.
Ángulo Inscrito.	Cuando el vértice está en la circunferencia y los lados son secantes a ella.
Ángulo semiinscrito.	Cuando el vértice está en la circunferencia y un lado del ángulo es secante y el otro lado es tangente.
Ángulo interior.	Cuando el vértice del ángulo está en el círculo y los lados son secantes a la circunferencia.
Ángulo exterior.	Cuando el vértice del ángulo está fuera de la circunferencia y sus lados son secantes a ella.
Ángulo circunscrito.	Cuando tiene el vértice fuera de la circunferencia y los lados son tangentes a ella (Fig. 19).

De entre todas las posiciones que pueden darse entre un ángulo y una circunferencia estudiaremos ahora las posiciones que se relacionan con la construcción del **arco capaz** y dejaremos las restantes para cuando estudiemos la potencia.

Estos ángulos que nos ocupan son el central, el inscrito y el semiinscrito.

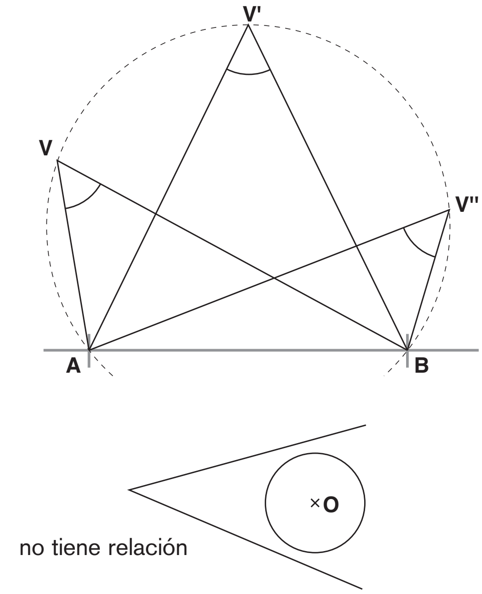


Fig. 17

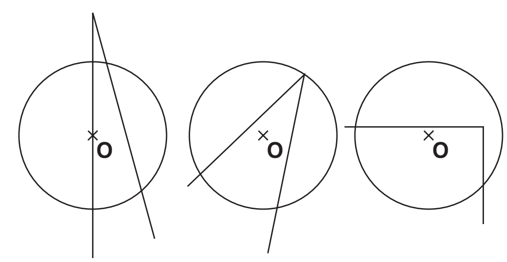


Fig. 18

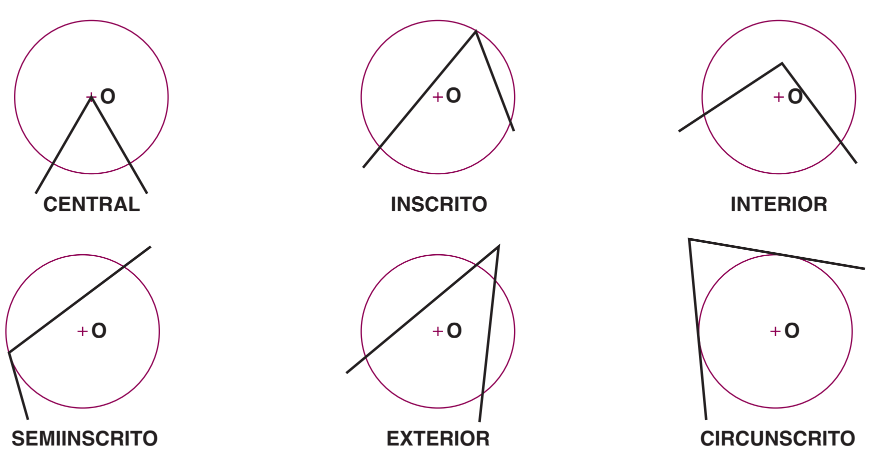


Fig. 19

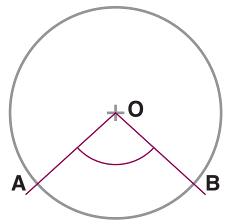


Fig. 20

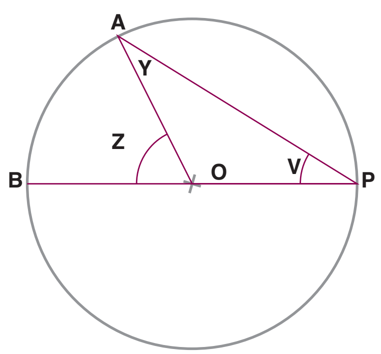


Fig. 21

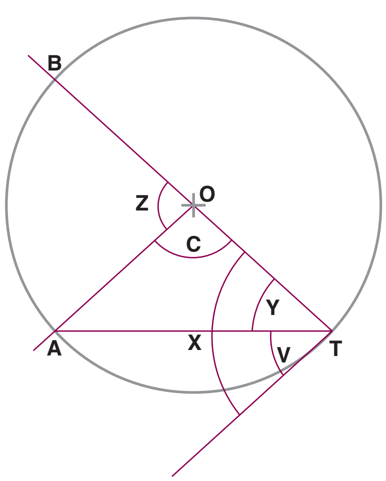


Fig. 22

Valores de los ángulos relacionados con la circunferencia

Ángulo central. Al tener el ángulo en el centro de la circunferencia los lados del ángulo abarcan un arco de la circunferencia y su medida será una fracción de los 360°, existe pues una relación entre la longitud de la circunferencia y sus 360°, la longitud del arco abarcado también guardará relación con el número de grados del mismo (Fig. 20).

Ángulo inscrito. El valor del ángulo inscrito es igual a la mitad del central correspondiente. Esto se puede comprobar haciendo que un lado del ángulo pase por el centro de la circunferencia. El ángulo inscrito **P** abarca el arco **AB**, el arco central **Z** abarca el mismo arco **AB**. El triángulo formado **AOP** es isósceles por ser sus lados radios de la circunferencia, luego los ángulos **V** e **Y** son iguales. Los ángulos de todo triángulo son complementarios. La suma de V e Y es igual a Z que es el suplementario de O para valer 180°. Luego V vale un medio de Z, o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{Z = Y + V}$$

$$\mathbf{V = Z - Y} \quad \text{luego} \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{Z}}{2} \quad \text{(Fig. 21)}$$

Ángulo semiinscrito. El valor de un ángulo semiinscrito **V** es también la mitad del central correspondiente **C**. El ángulo central de **V** es **C** ya que abarca la cuerda **AT**. La recta tangente en **T** es perpendicular al radio por lo que X vale 90°, el ángulo **X** = **V** + **Y**. El ángulo **Y** es inscrito y vale **Y** = $\frac{\mathbf{Z}}{2}$ (Fig. 22). Para demostrar que **V** vale la mitad de **C** tendremos:

$$\mathbf{V = X - Y}$$

$$\mathbf{V} = 90 - \frac{\mathbf{Z}}{2}$$

$$\mathbf{V} = \frac{180}{2} - \frac{\mathbf{Z}}{2} = \mathbf{V} = \frac{180 - \mathbf{Z}}{2} = \mathbf{V} = \frac{\mathbf{C}}{2}$$

Con lo expuesto puede observarse que tanto el valor de los ángulos inscrito y semiinscrito es la mitad del central correspondiente. *Por ello en la construcción del arco capaz intervienen los ángulos inscritos y semiinscritos.*

Construcción del arco capaz

De la definición del arco capaz se desprende que los puntos del plano abarcan con el mismo ángulo los extremos de un segmento.

Para su construcción debes conocer el segmento y el ángulo. Éstos son **V** y **AB**, sitúa el segmento **AB** y en un extremo sitúa el ángulo **V** (Fig. 23). El ángulo **V** será semiinscrito del arco capaz y la *perpendicular* **r** en **B** será radio del arco capaz. La mediatriz de **AB** determinará sobre el radio r el centro O del arco capaz. Se ha construido con ello una circunferencia cuyos ángulos inscritos y semiinscritos son iguales.

Si el ángulo dado es recto su ángulo central es de 180° por lo que el segmento AB se transforma en diámetro de la circunferencia, los ángulos inscritos son rectos (Fig. 24).

Como observación particular, el ángulo **V’** situado en la parte inferior del arco capaz, tiene como ángulo central **Z’**. En este caso también se cumple que el ángulo inscrito vale la mitad de central correspondiente (Fig. 25).

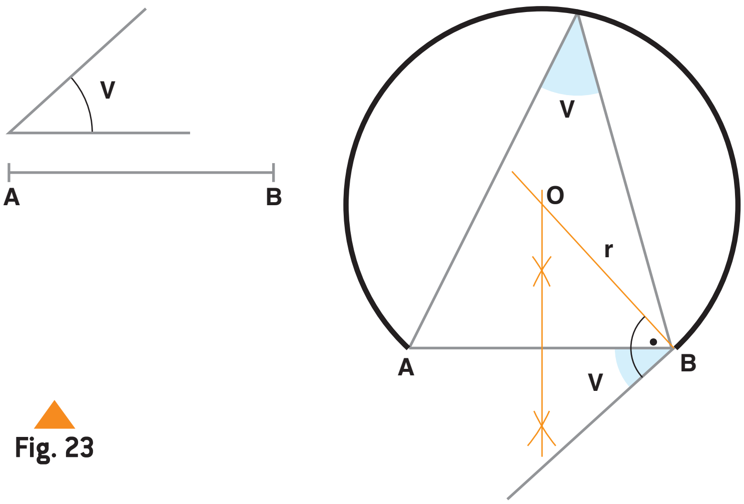


Fig. 23

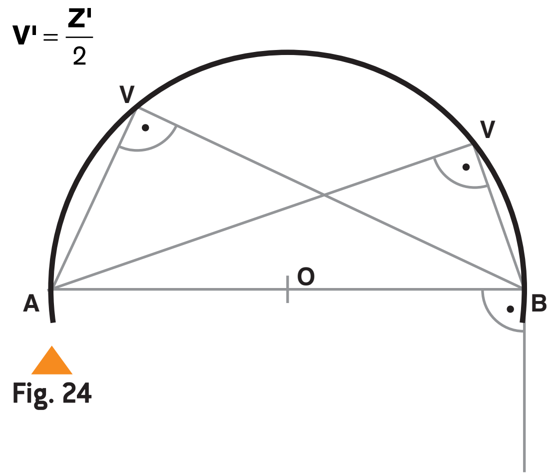


Fig. 24

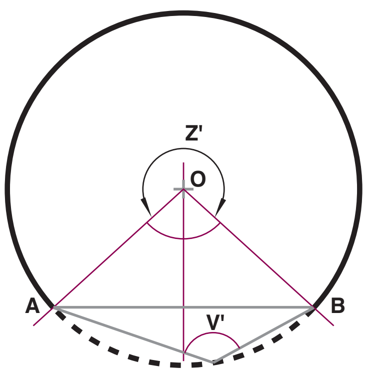


Fig. 25

Ejercicios

1. Trazado de la perpendicular en el extremo de un segmento aplicando el procedimiento del arco capaz para un ángulo recto.
2. Hallar el arco capaz para una cuerda de 27 mm y un ángulo de 33O.
3. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de un arco capaz coincidentes en el extremo de un segmento.
4. Hallar un triángulo conocidas la base de 34 mm, el ángulo opuesto a la base de 50O y la mediana de 31 mm.
5. Construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 43 mm y un ángulo 35O.
6. Construir un cuadrilátero sabiendo que la diagonal mide 37 mm, los ángulos opuestos miden A = 68O y B = 75O, y los lados opuestos 27 mm y 15 mm respectivamente.
7. Construir un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa mide 50 mm y el cateto 40 mm.

1.4 Rectificación de la circunferencia y arco

Rectificación de la circunferencia

Rectificar una circunferencia es hallar su longitud. Esto se puede resolver aplicando la fórmula matemática **2πR**, o mediante el trazado geométrico de Mascheroni, que es uno de los más simples de realizar. El trazado geométrico de Mascheroni se realiza así: una vez dibujada la circunferencia que queremos rectificar, se traza un diámetro **AB**. Tomando como centros **A** y **B** se describen dos arcos tomando el radio de la circunferencia. Obtenemos los puntos **M** y **N** sobre la circunferencia. Estos puntos pertenecen a un hexágono inscrito en ella. El punto **P** se obtiene con los radios **AN** y **BM** con centros en **A** y **B**. El punto **P'** se obtiene con radio **MP** haciendo centro en **M**. La cuerda **AP'** equivale a la cuarta parte de la longitud total de la circunferencia. (Fig. 26)

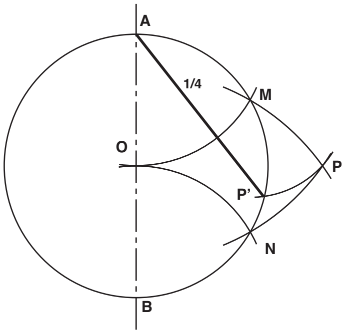


Fig. 26

Rectificación de un arco de circunferencia

Para rectificar un arco de magnitud **AB** se siguen los siguientes pasos:

Paso 1. Se divide el radio en cuatro partes iguales.

Paso 2, con centro en **C** y radio 3/4 se obtiene el punto **D.**

Paso 3, se traza la perpendicular en **A.**

Paso 4, se une **D** con **B** hasta cortar a la vertical en **E.** La recta **AE** es la rectificación del arco. (Fig. 27)

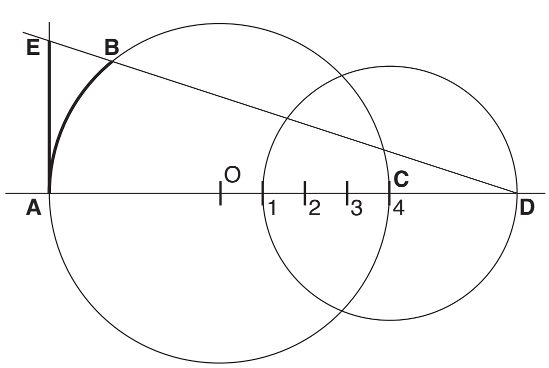


Fig. 27

1.5 Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Concepto de potencia

Aparentemente parece no existir ninguna relación entre un punto y una circunferencia (Fig 28)

Si partiendo del punto **P** se traza un haz de rectas, unas serán secantes, otras tangentes, otras no cortarán a la circunferencia. (Fig. 29)

Las rectas que no corten a la circunferencia no tienen ninguna relación con ella, pero las que sean secantes o tangentes determinarán unos puntos intersección con ella y, por tanto, cada recta quedará dividida en magnitudes, segmentos o distancias desde el punto P a los puntos intersección con la circunferencia. El producto de distancias de dicho punto a los puntos de la circunferencia, determina una constante **PA** · **PA'** = **K** que es la potencia de un punto respecto de una circunferencia (Fig. 30)

Esta constante **K** es la misma para todas las rectas que partiendo del punto P sean secantes o tangentes a la circunferencia.

Esta propiedad se desprende de la semejanza de los triángulos **A'PB** y **B'PA** formados al trazar estas rectas. (Fig. 31) Observa que los ángulos **A'** y **B'** son iguales por ser inscritos, los dos triángulos tienen común el ángulo **P**. Al tener todos sus ángulos iguales, son proporcionales, pudiendo establecer:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'} = PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = K$$

En el caso límite en que una secante se transforme en tangente el punto **T** es doble pues cumple una doble alineación con **P**, por tanto, **PT** = **PT'** (Fig. 32)

El ángulo en **A'** es inscrito y el ángulo en **T** es semiinscrito, por tanto, son iguales, el ángulo en **P** es común a los dos triángulos. Los ángulos de los dos triángulos formados son iguales y, por tanto, proporcionales, estableciendo que

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT'}{PA'} \qquad PT^2 = PA \cdot PA'$$

De la que resulta que la tangente **PT** es media proporcional entre la magnitud **PA** y la magnitud **PA'** (Fig. 33)

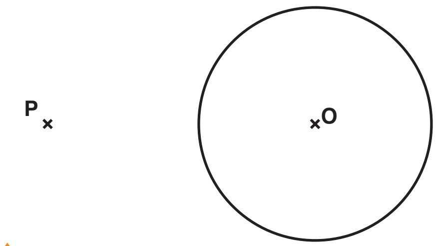


Fig. 28

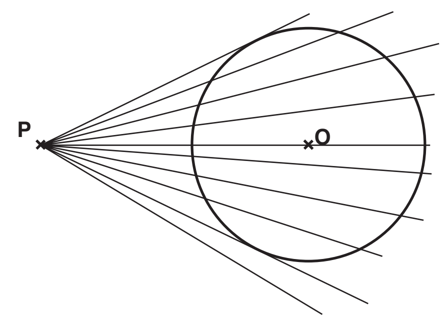


Fig. 29

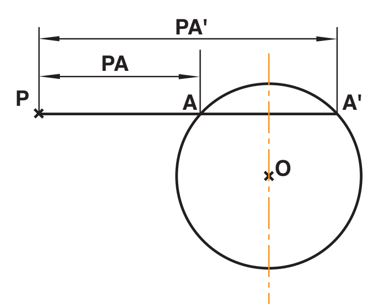


Fig. 30

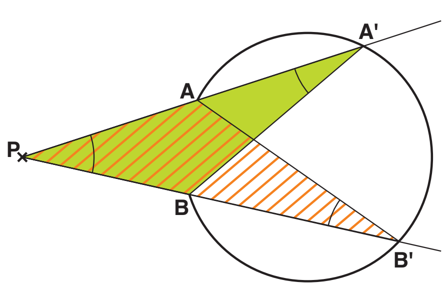


Fig. 31

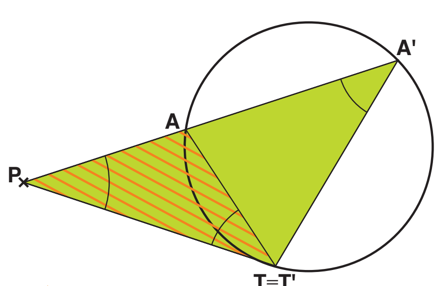


Fig. 32

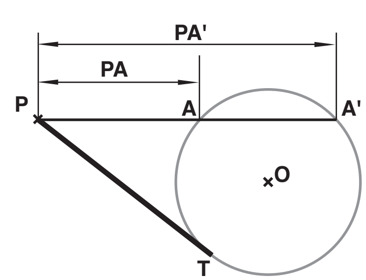


Fig. 33

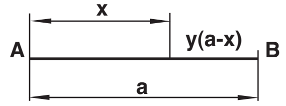


Fig. 34

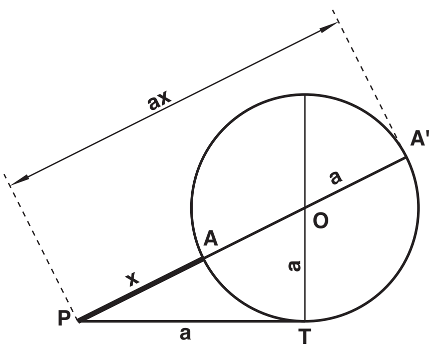


Fig. 35

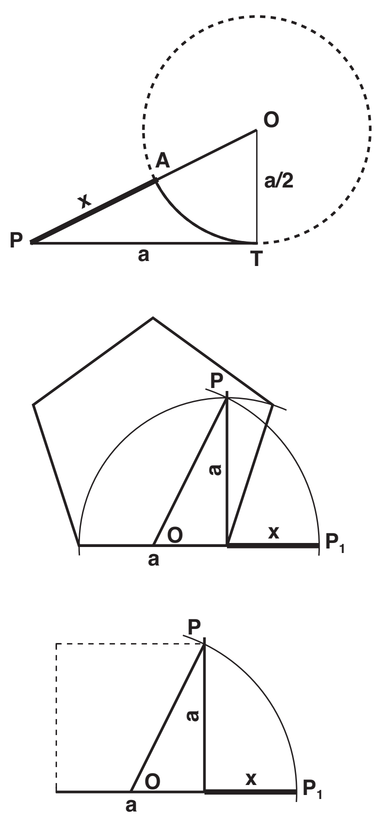


Fig. 36

Entre las infinitas proporciones que se derivan de la relación proporcional entre segmentos existe una que es la media y extrema razón, considerada por matemáticos y artistas como la más perfecta y armónica de todas las proporciones. Esta proporción se obtiene al dividir el segmento en dos partes tales que la parte pequeña es a la mayor, como la mayor es al segmento total. Esta proporción es también conocida como segmento áureo. (Fig. 34)

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = \Phi$$

En la que la pequeña es segmento áureo de la mayor y ésta es segmento áureo del segmento total. Esta constante solamente se da entre segmentos áureos.

Los segmentos que mantienen entre sí la proporción áurea forman una sucesión progresiva, en la que una magnitud es igual a la suma de las dos antecedentes, siendo segmentos áureos los unos de los otros. Así por ejemplo, **x**, **a**, **ax** ... decimos que **x** es segmento áureo de **a**, a la vez que **a** es segmento áureo de **ax**.

Los segmentos áureos pueden obtenerse mediante la construcción de la potencia de un punto respecto de una circunferencia. Pero para que la constante Φ se mantenga tiene que ser el diámetro de la circunferencia (**a**) igual a la recta tangente (**a**). (Fig. 35)

La recta **PA'** tiene que pasar necesariamente por el centro de la circunferencia, es entonces cuando el segmento **PA** (**x**) es segmento áureo de **PT** (**a**) y éste a la vez es segmento áureo de **PA'** (**ax**) manteniéndose la progresión.

La famosa serie Fibonaci surge de esta progesión, en la que sus magnitudes son segmentos áureos las unas de las otras 1, 2, 3, 5, 7, 8, 13, ... siendo una magnitud igual a la suma de las dos precedentes.

La constante de esta progresión puede obtenerse al dividir la magnitud por su segmento áureo

$$\frac{a}{x} = \Phi = 1{,}618$$

o bien obtenerlo matemáticamente despejando **a** y **x** de la ecuación de segundo grado formada

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = x^2 - ax \rightarrow \boxed{x^2 + ax - a^2 = 0}$$

Si **a** vale 1 entonces **x** se calcula del siguiente modo:

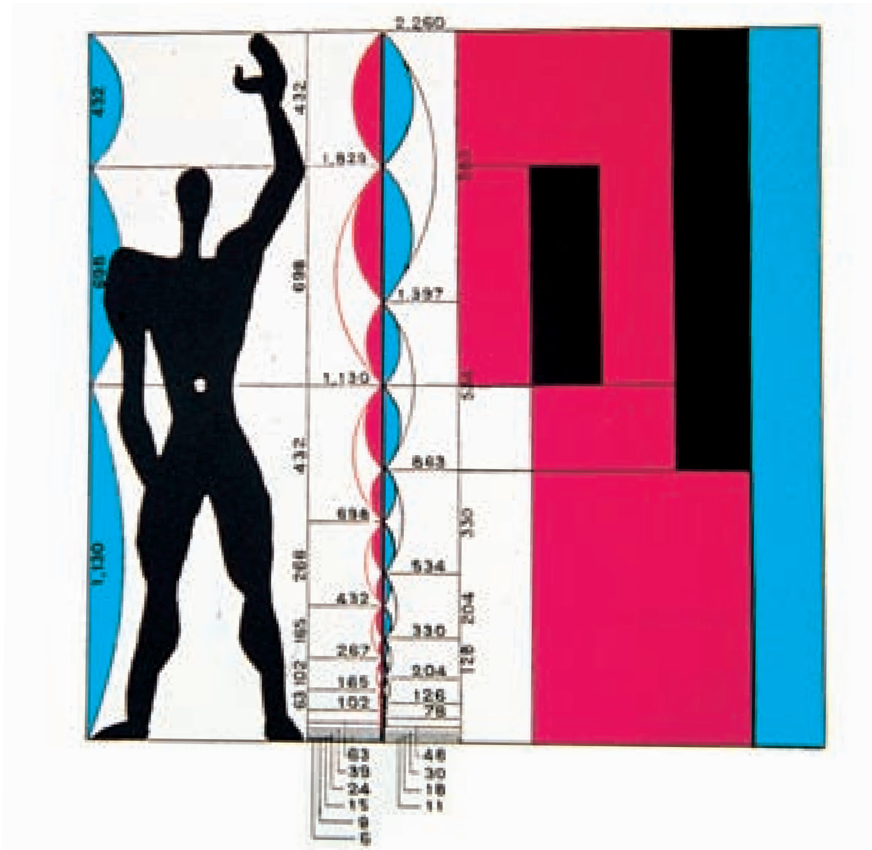
$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{1\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618$$

Para conocer el segmento áureo de cualquier otra magnitud, bastará multiplicar su valor por la constante obtenida (0,618). Por ejemplo, si una magnitud **a** vale 8 cm, el segmento áureo de **a** se obtendrá multiplicando el valor de **a** (8) por el valor de la constante (0,618) y se obtiene el valor de **x** que será 4,944.

La construcción geométrica de la figura 35 puede simplificarse como se indica en la figura 36.

De la construcción del pentágono, en la que el lado del pentágono es segmento áureo de la diagonal, puede resolverse fácilmente el segmento áureo x del segmento **a** (ver 2.3 fig. 34 a 37).

Con las magnitudes **a** y **x** tomadas como lados se puede trazar un rectángulo denominado rectángulo áureo. El rectángulo áureo determina en cada cuadrado un arco de circunferencia que genera la espiral logarítmica (ver tema 6 Fig. 9). (Fig. 37)



Modulor de Le Corbusier. Este modulor está generado mediante secciones aéreas.

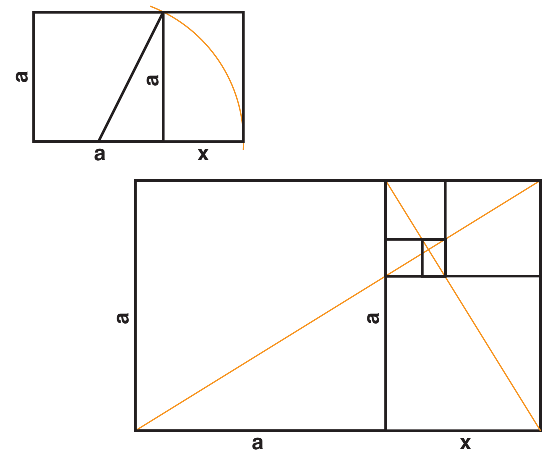


Fig. 37

Valor de la potencia

Para expresar el valor matemático de la potencia ésta puede calcularse tomando la recta que desde P pasa por el centro de la circunferencia, llamando **d** a la distancia que hay desde el punto P hasta el centro de la circunferencia y **r** al radio de la misma se tiene:

Potencia = **PA · PA' = K**

$$(\mathbf{d} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{r}) = \mathbf{d^2 - r^2 = K} \qquad \text{(Fig. 38)}$$

El valor de la potencia vendrá expresado por

$$\boxed{\mathbf{d^2 - r^2}}$$

Si **P** es exterior a la circunferencia la potencia será positiva ya que $\mathbf{d^2 - r^2 > 0}$

Si **P** es interior a la circunferencia la potencia será negativa ya que $\mathbf{d^2 - r^2 < 0}$

Si **P** está en la circunferencia al ser **d** y **r** iguales, la potencia será nula ya que $\mathbf{d^2 - r^2 = 0}$

Si **P** está en el centro de la circunferencia $\mathbf{d^2 = 0}$ por lo que el valor de la potencia es mínima y vale $\mathbf{-r^2}$ (fig. 38).

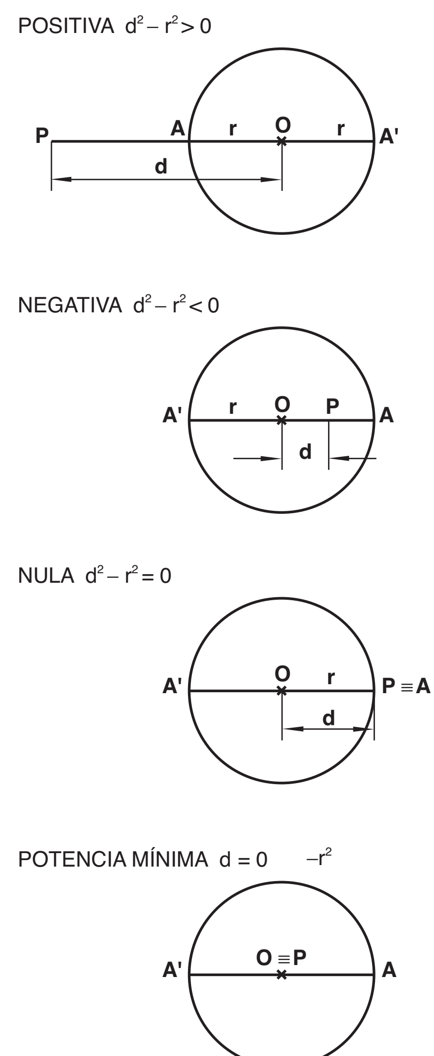
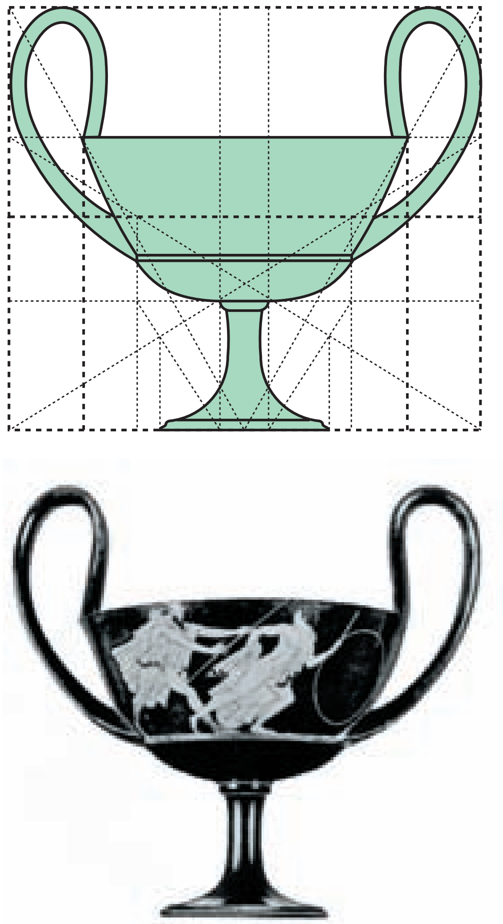
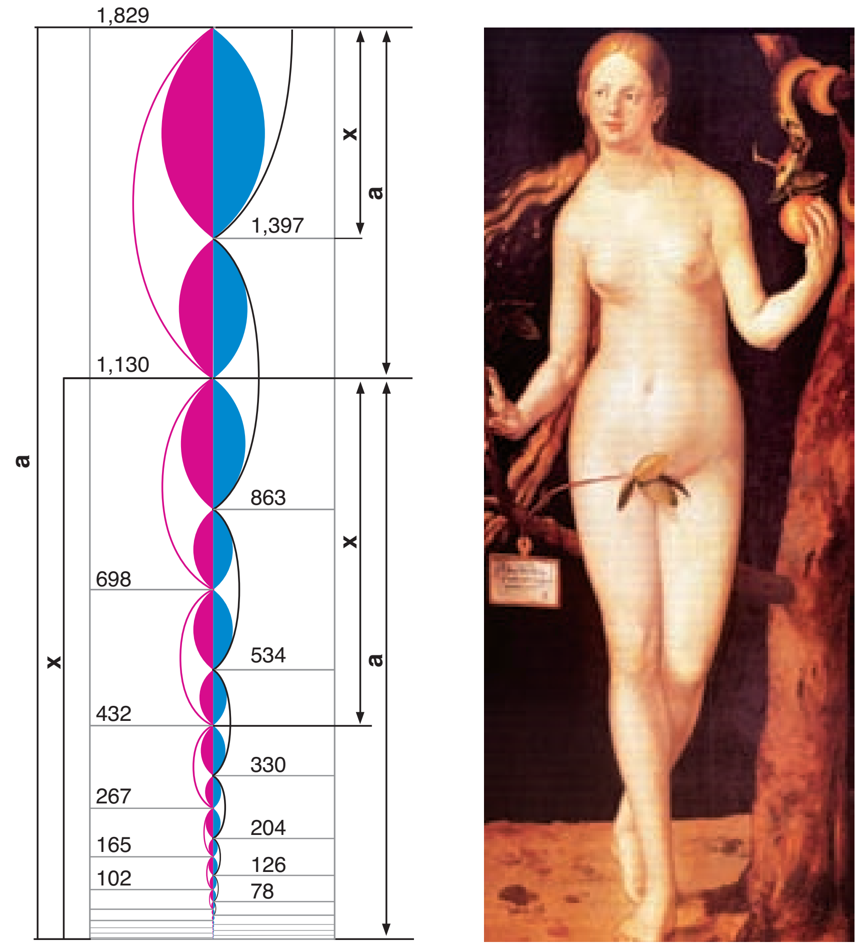


Fig. 38



Trazado armónico de Kantaros griego. Museo de Boston.



ALBERTO DURERO, *Eva*. Museo del Prado. Comparación del modulor de Le Corbusier con la figura de Eva.

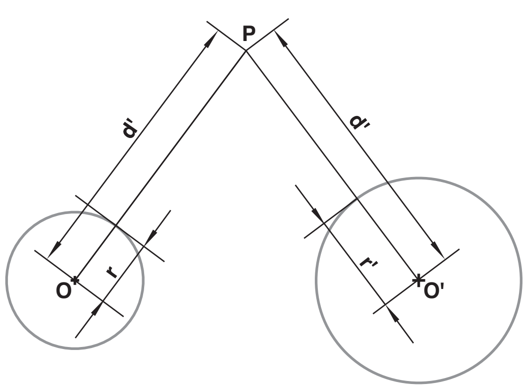


Fig. 39

1.6 Eje radical

Se llama eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de las dos circunferencias, resultando ser una recta perpendicular a la recta que una los centros de las dos circunferencias.

Fíjate en la Fig. 39, si **P** tiene igual potencia respecto de ambas circunferencias, se tendrá

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'2 \qquad (1)$$

y por tanto puede expresarse también como

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2 \qquad (2)$$

Todos los puntos que cumplen (2) tienen constante $\mathbf{(r^2 - r'^2)}$ la diferencia de cuadrados de sus distancias a los centros de las circunferencias, es decir $\mathbf{d^2 - d'^2}$ igual a constante.

● **Lugar geométrico $d^2 - d'^2$ igual a constante**

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de cuadrados a otros dos puntos fijos es constante, es una recta perpendicular a la recta que une los dos puntos fijos. Observa la Fig. 40, **O – O'** son los puntos fijos y **P** es el punto, **PM** es la mediana del triángulo y **PH** la altura.

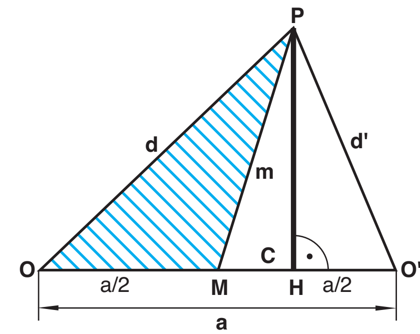


Fig. 40

> Según el teorema del coseno de un ángulo, en todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso/agudo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más/menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Así se tiene:

(1) Triángulo **OMP** $$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot c$$

(2) Triángulo **MPO'** $$d'^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot c$$

La diferencia 1 menos 2 da

$$d^2 - d'^2 = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot c = d^2 - d'^2 = 2 \cdot a \cdot c$$

La distancia **c** deberá ser constante, por ello la distancia **H-M** deberá ser siempre la misma para todo punto **P**. Todo punto **P** que mantenga **$d^2 - d'^2$** constante estará situado necesariamente sobre la perpendicular en **H** a la recta que une los centros. (Fig. 40)

● **Determinación del eje radical**

Cuando las circunferencias sean secantes o tangentes, la obtención del eje radical es muy fácil ya que éstas determinan puntos de potencia nula para las dos circunferencias, en este caso el eje radical pasará por los puntos de potencia nula cumpliendo la condición anterior. (Fig. 41)

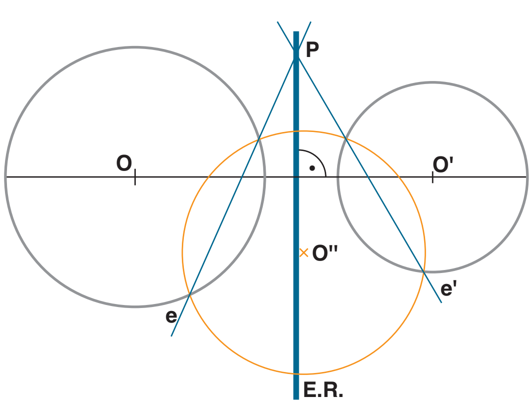


Fig. 42

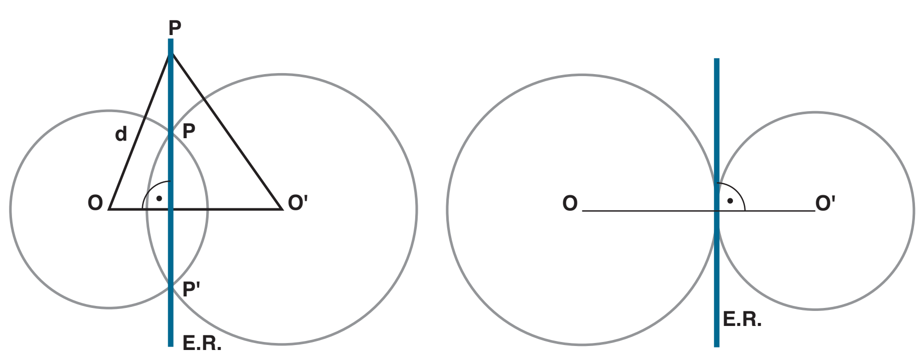


Fig. 41

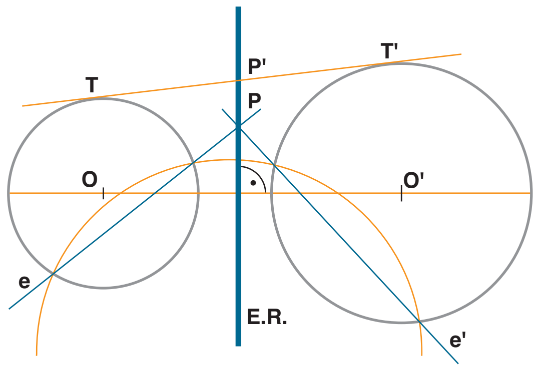


Fig. 43

Conocida la facilidad con que se obtiene el eje radical en las circunferencias secantes, se recurre a ella siempre que se quiera hallar el eje radical a dos circunferencias dadas. (Fig. 42) Para ello se traza una circunferencia auxiliar secante a las dos dadas que determina dos ejes radicales **e** y **e'** que se cortan en **P**. Los puntos de cada eje tienen la misma potencia respecto de la auxiliar y de las circunferencias dadas. El punto **P** de intersección de los dos ejes tendrá pues la misma potencia, desde él se traza la perpendicular a la recta que une los centros y que es el eje radical común a las dos circunferencias dadas.

Observa que en la figura 43 se ha trazado una recta tangente, **P'** es el punto medio entre **T** y **T'**. Por tener la misma potencia **PT** = **PT'**.

En la figura 44 se plantea un caso en que las circunferencias sean interiores, en este caso se resuelve por el mismo procedimiento.

Para obtener el eje radical sirve cualquier circunferencia a excepción del caso límite en que el centro de la auxiliar se alinee con los otros centros, en este caso los ejes radicales obtenidos son paralelos y P es infinito, no resolviendo en este caso el problema. (Fig. 45)

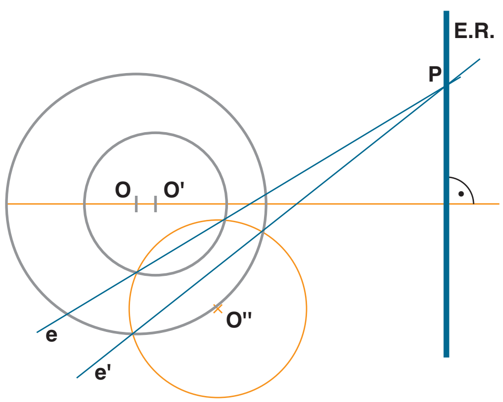


Fig. 44

Haces de circunferencias coaxiales

Al conjunto de circunferencias que tienen un mismo eje radical se le llama haz de circunferencias. Todo punto del eje radical la misma potencia respecto de todas las circunferencias del haz.

Tipos de haces:

Haz secante.- Dos circunferencias al cortarse determinan dos puntos de potencia nula. Por dos puntos pasan infinitas circunferencias que pertenecen a ese haz, todas ellas tienen potencia nula, el eje radical pasa por los dos puntos de la intersección y tendrá la misma potencia respecto de todo el haz. Observa que al ser $\mathbf{PT^2 = PA \cdot PA'}$ la tangente **PT** a todas las circunferencias del haz tendrá la misma longitud para todas y será radio de una circunferencia secante que determinará todos los puntos de tangencia posibles desde **P**. (Fig. 46)

Haz tangente.- Será el formado por las infinitas circunferencias que pueden pasar por un punto, este punto tiene potencia nula y es común para todas las circunferencias del haz. La recta que pase por el punto de tangencia y sea perpendicular a la recta que una los centros, será el eje radical y cumplirá la misma condición anterior. (Fig. 47)

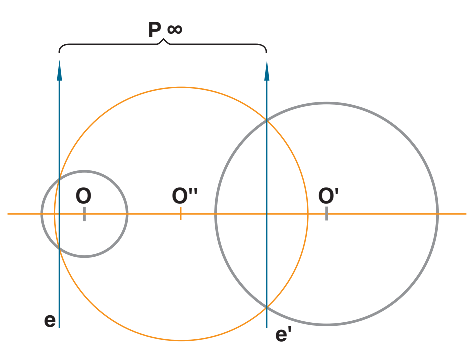


Fig. 45

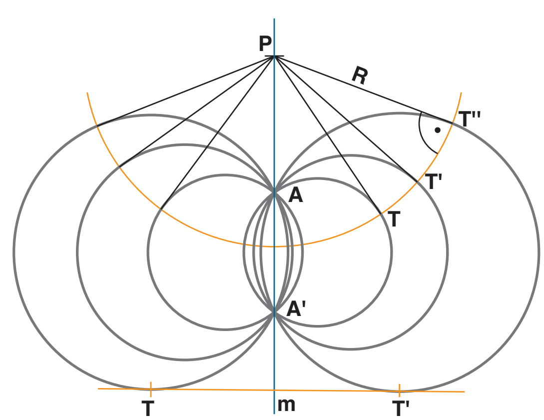


Fig. 46

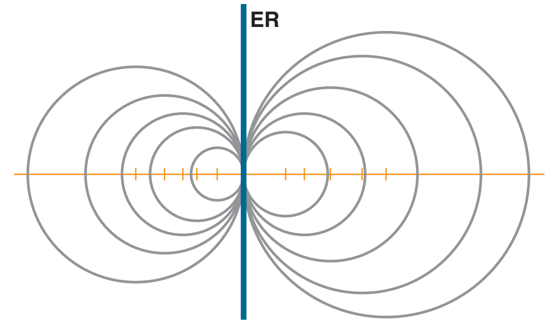


Fig. 47

Haz no secante (haz ortogonal). Si la recta **r** es exterior a **c**, para hallar las restantes circunferencias del haz bastará que tengan sus centros en la recta **d** y que el punto **Q** de intersección de **d** y **r** tenga la misma potencia respecto de ellas y **c**. Para obtener esta condición, bastará trazar la circunferencia de centro Q que sea ortogonal a **c**. (Dos circunferencias son ortogonales cuando se cortan de tal modo que los radios de ambas son tangentes, y por tanto perpendiculares entre sí). Toda circunferencia del haz que sea ortogonal a la de centro **Q** cumplirá la misma condición. Los punto **M** y **N** se llaman polos del haz.

Como en los casos anteriores todo punto **P** del eje radical por tener la misma potencia para todo el haz, las rectas tangentes trazadas desde **P** a todas las circunferencias del haz tendrán la misma longitud y serán radios de una circunferencia de centro en **P**. (Fig. 48).

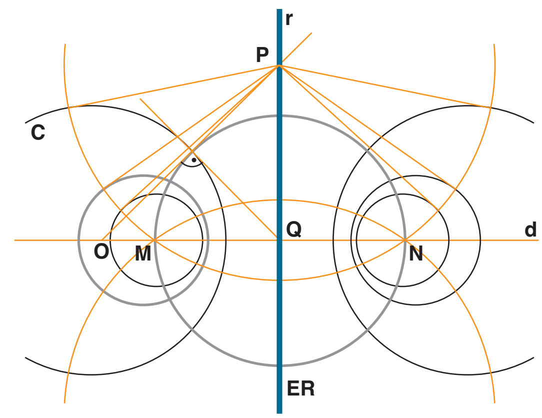


Fig. 48

Ejercicios

1. Dibujar los segmentos tangentes desde un punto a una circunferencia cuya distancia es de 8 cm y el radio de la circunferencia de 2 cm.
2. Hallar el eje radical de estos pares de circunferencias.